# Onde e flussi: equazioni differenziali parziali applicate a migrazioni e diffusioni geografiche

## La matematica dello spazio e del movimento umano

La comprensione dei fenomeni migratori, delle diffusioni culturali e delle dinamiche di popolamento rappresenta una delle sfide più affascinanti e complesse nell'intersezione tra matematica, geografia e scienze sociali. Le equazioni differenziali parziali costituiscono lo strumento matematico fondamentale per descrivere processi che evolvono simultaneamente nel tempo e nello spazio, offrendo un framework rigoroso per modellare fenomeni che vanno dalla propagazione di innovazioni tecnologiche alle grandi migrazioni storiche, dall'espansione dell'agricoltura neolitica alla diffusione delle lingue attraverso i continenti.

La potenza delle equazioni differenziali parziali risiede nella loro capacità di catturare la natura continua dei processi spaziali, permettendo di descrivere come una quantità distribuita nello spazio evolva nel tempo sotto l'influenza di meccanismi locali di trasporto, diffusione e trasformazione. Questo approccio matematico, nato originariamente per descrivere fenomeni fisici come la propagazione del calore o il movimento dei fluidi, si è rivelato straordinariamente efficace nell'analisi di processi umani e biologici che, pur essendo intrinsecamente discreti a livello individuale, manifestano comportamenti continui e regolari quando osservati su scale spaziali e temporali sufficientemente ampie.

Il presente trattato si propone di esplorare sistematicamente le principali classi di equazioni differenziali parziali che trovano applicazione nello studio delle dinamiche spaziali umane e biologiche, partendo dall'equazione del calore applicata alla diffusione culturale, attraversando i modelli di reazione-diffusione per l'espansione agricola, fino alle complesse equazioni di Navier-Stokes per le correnti oceaniche che hanno plasmato le rotte migratorie storiche. Particolare attenzione verrà dedicata ai fronti di invasione biologica, ai fenomeni di percolazione su reti geografiche e ai modelli gravitazionali che descrivono i flussi migratori contemporanei.

## L'equazione del calore e la diffusione culturale e linguistica

L'equazione del calore rappresenta probabilmente la più fondamentale tra le equazioni differenziali parziali di tipo parabolico e costituisce il punto di partenza naturale per comprendere i processi diffusivi in ambito geografico e culturale. Nella sua forma più elementare, l'equazione descrive come una distribuzione di temperatura evolva nel tempo sotto l'effetto della conduzione termica, ma la sua applicabilità si estende ben oltre i confini della fisica termica.

La formulazione matematica dell'equazione del calore in una dimensione spaziale è espressa come $\partial u/\partial t = D\ \partial^2 u/\partial x^2$, dove u(x,t) rappresenta la quantità che si diffonde (temperatura nel caso fisico originale), t indica il tempo, x la coordinata spaziale e D è il coefficiente di diffusione, che misura la velocità con cui

avviene il processo diffusivo. In tre dimensioni spaziali, l'equazione assume la forma $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u$, dove $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ è l'operatore laplaciano che cattura la curvatura locale della distribuzione spaziale.

L'applicazione di questo formalismo alla diffusione culturale richiede una reinterpretazione concettuale degli elementi dell'equazione. La funzione $u(x,t)$ può rappresentare la densità di portatori di un particolare tratto culturale, la frequenza di utilizzo di una parola o di un fonema in una data regione geografica, oppure la penetrazione di una tecnologia nella popolazione. Il coefficiente di diffusione D incorpora molteplici fattori: la mobilità geografica della popolazione, l'intensità dei contatti sociali, le barriere culturali e linguistiche, nonché la propensione all'adozione di innovazioni.

Un esempio classico dell'applicazione dell'equazione del calore alla linguistica è lo studio della diffusione delle innovazioni fonologiche attraverso un continuum dialettale. Consideriamo il caso di un cambiamento fonetico che origina in un centro urbano e si propaga nelle regioni circostanti. Se $u(x,y,t)$ rappresenta la proporzione della popolazione che ha adottato la nuova pronuncia nel punto geografico $(x,y)$ al tempo $t$, l'equazione $\partial u/\partial t = D(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2)$ descrive la diffusione spaziale del cambiamento. La soluzione di questa equazione, partendo da una condizione iniziale localizzata $u(x,y,0) = \delta(x-x_0, y-y_0)$ (una delta di Dirac centrata nel punto di origine), è data dalla funzione gaussiana $u(x,y,t) = (1/4\pi Dt)\exp(-(r^2/4Dt))$, dove $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ è la distanza quadrata dal centro di diffusione.

Questa soluzione fondamentale rivela proprietà notevoli del processo diffusivo. La diffusione della gaussiana è proporzionale alla radice quadrata del tempo, indicando che la distanza caratteristica raggiunta dal fronte di diffusione cresce come $\sqrt{(Dt)}$. Questo comportamento di tipo $\sqrt{t}$ è una firma distintiva dei processi puramente diffusivi e trova conferma empirica in numerosi studi sulla propagazione di innovazioni linguistiche, come quelli condotti da William Labov sulle variazioni dialettali dell'inglese americano o gli studi di Jean Séguy sulla diffusione delle innovazioni lessicali nei dialetti guasconi dei Pirenei francesi.

Tuttavia, l'equazione del calore nella sua forma pura presenta limitazioni quando applicata a fenomeni culturali reali. La principale criticità risiede nell'assenza di direzione preferenziale: l'equazione è perfettamente simmetrica rispetto all'inversione temporale a livello locale, anche se il secondo principio della termodinamica impone una direzione globale. Nei fenomeni culturali, invece, esistono spesso asimmetrie fondamentali legate a fattori come il prestigio sociale, la dimensione demografica dei centri urbani, o le dinamiche di potere che favoriscono la diffusione in direzioni specifiche.

Per incorporare questi effetti, è necessario modificare l'equazione introducendo termini di advection o convezione. L'equazione risultante assume la forma $\partial u/\partial t + v\cdot\nabla u = D\nabla^2 u$, dove $v$ è un campo di velocità che rappresenta il flusso direzionale dell'innovazione culturale. Questo termine addizionale $v\cdot\nabla u$ descrive il trasporto della quantità $u$ lungo la direzione del vettore velocità. Nel contesto della diffusione linguistica, $v$ potrebbe rappresentare il flusso netto di migranti da regioni rurali verso centri urbani, o la direzione privilegiata di diffusione del prestigio culturale da metropoli verso periferie.

Un aspetto particolarmente interessante nell'applicazione dell'equazione del calore alla linguistica riguarda la determinazione del coefficiente di diffusione D a partire da dati empirici. Studi quantitativi sulla diffusione lessicale hanno permesso di stimare valori di D dell'ordine di 0.5-5 $km^2$/anno per innovazioni linguistiche in comunità pre-industriali con mobilità limitata, mentre nelle società contemporanee con alta mobilità e comunicazioni di massa, i coefficenti di diffusione possono raggiungere valori di 100-1000 $km^2$/anno o più. Questi valori riflettono l'accelerazione drammatica dei processi di omogeneizzazione linguistica nell'era moderna.

L'equazione del calore trova anche applicazione nello studio della diversificazione linguistica attraverso il processo inverso: la differenziazione dialettale come risultato dell'isolamento geografico. In questo contesto, diverse regioni che inizialmente condividevano una lingua comune divergono nel tempo a causa della limitata interazione. Il modello matematico incorpora un termine di "mutazione" o innovazione locale che compete con la diffusione: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + \mu f(u)$, dove $\mu$ è il tasso di innovazione linguistica e $f(u)$ una funzione che descrive come le innovazioni vengano generate. Questo tipo di equazione genera pattern di isoglosse, linee che delimitano regioni con caratteristiche linguistiche distinte, che corrispondono alle soluzioni stazionarie dell'equazione dove diffusione e innovazione si bilanciano.

Un esempio concreto di applicazione quantitativa riguarda lo studio della diffusione delle lingue indoeuropee attraverso l'Europa. Modelli basati sull'equazione del calore, calibrati con dati archeologici e genetici, sono stati utilizzati per ricostruire le velocità di espansione delle popolazioni neolitiche portatrici delle lingue indoeuropee. Questi studi hanno permesso di stimare velocità di avanzamento del fronte agricolo dell'ordine di 1 km/anno, compatibili con un coefficiente di diffusione $D \approx 1\text{-}2$ km²/anno, assumendo un modello di diffusione dèmica in cui agricoltori si espandono gradualmente in territori precedentemente abitati da cacciatori-raccoglitori.

La teoria matematica associata all'equazione del calore fornisce anche strumenti per comprendere l'effetto delle barriere geografiche sulla diffusione culturale. Catene montuose, deserti, o grandi corpi d'acqua possono essere modellati come regioni in cui il coefficiente di diffusione D assume valori drasticamente ridotti o nulli. Le soluzioni dell'equazione del calore in domini con tali disomogeneità mostrano che le barriere agiscono come filtri, ritardando e attenuando la propagazione di innovazioni culturali. Matematicamente, questo si traduce nell'analisi di problemi ai valori al contorno in geometrie complesse, dove le condizioni al bordo rappresentano l'interazione tra regioni con diverse permeabilità culturali.

Un raffinamento ulteriore del modello considera l'equazione del calore anisotropa, dove il coefficiente di diffusione diventa un tensore $D_{ij}$ che varia con la direzione: $\partial u/\partial t = \partial/\partial x_i(D_{ij} \partial u/\partial x_j)$. Questa generalizzazione è particolarmente appropriata per descrivere situazioni in cui la diffusione avviene preferenzialmente lungo determinate direzioni geografiche, come valli fluviali o rotte commerciali stabilite. Gli autovalori e autovettori del tensore di diffusione identificano le direzioni principali e le velocità caratteristiche di propagazione lungo tali assi.

# Modelli di reazione-diffusione: l'equazione di Fisher-KPP e l'espansione agricola neolitica

Mentre l'equazione del calore descrive processi puramente diffusivi, molti fenomeni di espansione geografica coinvolgono anche meccanismi locali di crescita o trasformazione che interagiscono con la diffusione spaziale. I modelli di reazione-diffusione combinano questi due aspetti fondamentali e rappresentano uno strumento matematico estremamente potente per comprendere fenomeni di invasione biologica e culturale.

L'equazione di Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov, comunemente abbreviata come equazione di Fisher-KPP, rappresenta il prototipo dei modelli di reazione-diffusione e riveste un'importanza centrale nello studio dell'espansione del Neolitico e delle transizioni demografiche associate all'adozione dell'agricoltura. Proposta indipendentemente da Ronald Fisher nel 1937 nel contesto della genetica delle popolazioni e da Andrey Kolmogorov, Ivan Petrovsky e Nikolai Piskunov nel 1937 per descrivere la propagazione di vantaggi genetici in popolazioni spazialmente strutturate, l'equazione ha trovato applicazioni in ambiti straordinariamente diversi.

La forma canonica dell'equazione di Fisher-KPP in una dimensione spaziale è $\partial u/\partial t = D\,\partial^2 u/\partial x^2 + ru(1 - u/K)$, dove u(x,t) rappresenta la densità di popolazione, D è il coefficiente di diffusione che misura la dispersione spaziale degli individui, r è il tasso intrinseco di crescita della popolazione e K è la capacità portante dell'ambiente, che rappresenta la densità massima sostenibile. Il termine $ru(1 - u/K)$ è il termine di reazione che descrive la crescita logistica locale: quando la popolazione è piccola ($u << K$), la crescita è approssimativamente esponenziale con tasso r, mentre quando u si avvicina a K la crescita rallenta e si arresta al raggiungimento della capacità portante.

La caratteristica più notevole dell'equazione di Fisher-KPP è l'esistenza di soluzioni a onda viaggiante che descrivono fronti di invasione che si propagano a velocità costante. Una soluzione a onda viaggiante ha la forma $u(x,t) = U(x - ct)$, dove c è la velocità del fronte e U è un profilo spaziale che connette lo stato non invaso ($U \to 0$ per $\xi \to -\infty$) allo stato invaso ($U \to K$ per $\xi \to +\infty$), con $\xi = x - ct$ la coordinata nel sistema di riferimento mobile. Sostituendo questa forma nell'equazione di Fisher-KPP si ottiene un'equazione differenziale ordinaria per il profilo U: $-cU' = DU'' + rU(1 - U/K)$, dove il primo e il secondo derivata sono rispetto a $\xi$.

L'analisi matematica rigorosa di questa equazione, sviluppata in dettaglio da Kolmogorov e collaboratori, rivela che esistono soluzioni a onda viaggiante per ogni velocità $c \geq c^* = 2\sqrt{(Dr)}$, dove $c^*$ è la velocità minima di propagazione. Questa velocità minima ha un'interpretazione fisica profonda: rappresenta la velocità alla quale il fronte di invasione avanza se inizia da una perturbazione localizzata. La formula $c^* = 2\sqrt{(Dr)}$ mostra che la velocità dipende dalla radice quadrata del prodotto tra diffusività e tasso di crescita, un risultato che ha implicazioni dirette per la comprensione dell'espansione agricola.

Applicando questo framework all'espansione del Neolitico in Europa, possiamo interpretare u come la densità di agricoltori neolitici, con D che rappresenta la dispersione di individui o famiglie verso territori non ancora colonizzati, r il tasso netto di crescita demografica delle comunità agricole e K la densità di popolazione sostenibile con l'economia agricola. I dati archeologici indicano che il fronte agricolo si è propagato attraverso l'Europa con una velocità approssimativa di 1 km/anno, partendo dall'Anatolia circa 9000 anni fa e raggiungendo le coste atlantiche intorno a 5000 anni fa.

Utilizzando la formula $c^* = 2\sqrt{(Dr)}$ e la velocità osservata di circa 1 km/anno, possiamo stimare i parametri demografici impliciti nel processo. Se assumiamo un coefficiente di diffusione $D \approx 25\text{-}100$ km²/generazione (corrispondente a una distanza quadratica media di dispersione di 5-10 km per generazione) e una durata generazionale di circa 25 anni, otteniamo $D \approx 1\text{-}4$ km²/anno. Con $c^* \approx 1$ km/anno, la formula implica un tasso di crescita $r \approx (c^*)^2/(4D) \approx 0.06\text{-}0.25$ anno$^{-1}$, corrispondente a un tempo di raddoppio della popolazione di circa 3-12 anni. Questi valori sono compatibili con stime indipendenti della demografia neolitica derivate da analisi paleoantropologiche e genetiche.

Un aspetto cruciale dell'analisi è la distinzione tra due meccanismi fondamentali di espansione: la diffusione dèmica e la diffusione culturale. Nella diffusione dèmica, sono gli agricoltori stessi a migrare e colonizzare nuovi territori, portando con sé le loro pratiche agricole e il loro patrimonio genetico. Nella diffusione culturale, invece, le tecniche agricole vengono adottate dalle popolazioni locali di cacciatori-raccoglitori attraverso contatti e scambi, senza sostanziale movimento di persone. L'evidenza genetica, che mostra una significativa componente anatolica nel DNA delle popolazioni europee moderne con un gradiente geografico compatibile con l'espansione neolitica, supporta un modello di diffusione prevalentemente dèmica, sebbene con contributi locali di assimilazione culturale.

L'equazione di Fisher-KPP può essere estesa per incorporare eterogeneità ambientale, un aspetto essenziale per una descrizione realistica dell'espansione agricola. La produttività agricola varia considerevolmente con il tipo di suolo, la disponibilità d'acqua, il clima e la topografia. Questo può essere

modellato permettendo che i parametri r e K diventino funzioni spaziali: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + r(x)u(1 - u/K(x))$. In regioni particolarmente favorevoli, con alta capacità portante K e buon tasso di crescita r, la popolazione agricola si espande rapidamente e funge da sorgente per la colonizzazione di aree adiacenti. Al contrario, regioni marginali con basso K possono agire da barriere parziali che rallentano ma non arrestano completamente l'avanzamento del fronte.

Un modello più sofisticato considera l'interazione tra due popolazioni: agricoltori (u) e cacciatori-raccoglitori (v). Il sistema di equazioni diventa: $\partial u/\partial t = D_u\nabla^2 u + r_u u(1 - (u+\alpha v)/K_u)$, $\partial v/\partial t = D_v\nabla^2 v + r_v v(1 - (v+\beta u)/K_v)$, dove $\alpha$ e $\beta$ rappresentano l'intensità della competizione inter-specifica per le risorse. Se gli agricoltori hanno un vantaggio demografico ($r_u > r_v$ o $K_u > K_v$), il sistema può mostrare soluzioni in cui un fronte di agricoltori avanza e rimpiazza progressivamente i cacciatori-raccoglitori. L'analisi di stabilità di questi fronti rivela che la coesistenza stabile delle due popolazioni è possibile solo in circostanze specifiche, tipicamente quando esistono nicchie ecologiche distinte che permettono la specializzazione.

La teoria dei sistemi di reazione-diffusione prevede anche fenomeni più complessi come fronti pulsanti, dove la velocità di propagazione non è costante ma oscilla periodicamente, o pattern spaziali stazionari dove le due popolazioni coesistono in configurazioni alternate nello spazio. Questi pattern emergono quando i tassi di diffusione sono sufficientemente differenti e quando esistono non-linearità nella competizione. Sebbene l'evidenza archeologica per tali pattern complessi nella transizione neolitica sia limitata, casi isolati di coesistenza prolungata tra agricoltori e cacciatori-raccoglitori in regioni marginali potrebbero riflettere dinamiche di questo tipo.

Un aspetto metodologico importante riguarda la connessione tra il modello continuo di reazione-diffusione e la natura intrinsecamente discreta delle popolazioni umane. L'equazione di Fisher-KPP è una descrizione in limite di campo medio, valida quando le popolazioni sono sufficientemente grandi da giustificare un'approssimazione deterministica continua. Per popolazioni piccole o in situazioni dove le fluttuazioni stocastiche sono rilevanti, è necessario considerare versioni stocastiche dell'equazione, tipicamente formulate come equazioni differenziali stocastiche parziali: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + ru(1 - u/K) + \sigma\sqrt{u}\,\xi(x,t)$, dove $\xi(x,t)$ è un rumore bianco spazio-temporale e $\sigma$ misura l'intensità delle fluttuazioni demografiche. Queste fluttuazioni possono significativamente alterare la dinamica dei fronti, particolarmente nelle fasi iniziali dell'invasione quando le popolazioni sono ancora piccole.

L'estensione dell'equazione di Fisher-KPP a due dimensioni spaziali introduce complicazioni geometriche ma anche nuove possibilità di confronto con dati archeologici. La propagazione di un fronte in due dimensioni da una regione sorgente, come l'Anatolia per il Neolitico europeo, genera pattern di arrivo differenziati che dipendono dalla geometria della sorgente e dalla distribuzione spaziale delle eterogeneità ambientali. Tecniche numeriche avanzate, basate su metodi agli elementi finiti o alle differenze finite, permettono di simulare l'equazione su geografie realistiche incorporate in sistemi informativi geografici (GIS), confrontando le previsioni del modello con le datazioni radiocarboniche dei siti archeologici neolitici.

Uno degli sviluppi più interessanti degli ultimi decenni è l'integrazione di modelli di reazione-diffusione con dati genetici. L'espansione di una popolazione crea caratteristiche firme genetiche nella distribuzione spaziale della diversità genetica. In particolare, le popolazioni alla frontiera di un'espansione subiscono ripetuti "colli di bottiglia" (bottleneck) demografici e l'effetto del fondatore amplifica la deriva genetica, riducendo la diversità genetica e aumentando la differenziazione tra popolazioni. Modelli matematici che combinano l'equazione di Fisher-KPP con la genetica delle popolazioni predicono che la diversità

genetica dovrebbe decrescere linearmente con la distanza dal centro di espansione, una previsione confermata da analisi genomiche su popolazioni europee che mostrano un gradiente di diversità decrescente da sud-est verso nord-ovest, parallelo alla direzione dell'espansione neolitica.

La formula esplicita per la velocità del fronte $c^* = 2\sqrt{(Dr)}$ ha permesso anche di affrontare questioni controverse sulla natura dell'espansione agricola. Una delle questioni centrali riguarda se la transizione neolitica sia stata principalmente guidata da vantaggi demografici intrinseci dell'agricoltura o da processi di conquista e rimpiazzamento violento. La relativa lentezza dell'espansione (circa 1 km/anno) è più compatibile con un processo di crescita demografica e dispersione graduale che con rapide conquiste militari, che tipicamente avvengono su scale temporali di decenni piuttosto che millenni. Questo non esclude conflitti locali, ma suggerisce che il motore principale dell'espansione sia stato il vantaggio riproduttivo conferito dall'economia agricola.

# Le equazioni di Navier-Stokes e le correnti oceaniche nelle migrazioni storiche

Le equazioni di Navier-Stokes costituiscono uno dei sistemi di equazioni differenziali parziali più complessi e fondamentali della fisica matematica, descrivendo il moto dei fluidi viscosi sotto l'azione di forze esterne. Sebbene la loro applicazione primaria sia nell'idrodinamica e nell'aerodinamica, esse rivestono un ruolo cruciale nella comprensione delle correnti oceaniche che hanno plasmato le rotte migratorie, gli scambi culturali e le espansioni imperiali nella storia umana.

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile possono essere scritte nella forma: $\rho(\partial v/\partial t + (v\cdot\nabla)v) = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + f$, $\nabla\cdot v = 0$, dove $v(x,t)$ è il campo di velocità del fluido, $\rho$ la densità, $p$ la pressione, $\mu$ la viscosità dinamica e $f$ rappresenta le forze esterne per unità di volume (tipicamente la gravità e la forza di Coriolis dovuta alla rotazione terrestre). La prima equazione esprime la conservazione della quantità di moto, mentre la seconda impone l'incomprimibilità del fluido.

Il termine non-lineare $(v\cdot\nabla)v$ nell'equazione di Navier-Stokes, che descrive l'accelerazione convettiva del fluido, è responsabile della ricchezza fenomenologica dei moti fluidi, inclusa la turbolenza. Questa non-linearità rende le equazioni estremamente difficili da risolvere analiticamente, eccetto in casi speciali con alta simmetria. La questione dell'esistenza e regolarità globale delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes in tre dimensioni è uno dei Millennium Problems del Clay Mathematics Institute, con un premio di un milione di dollari per la sua risoluzione, testimonianza della profondità matematica di questo sistema.

Nel contesto delle correnti oceaniche su larga scala, le equazioni di Navier-Stokes devono essere modificate per tenere conto degli effetti della rotazione terrestre e della stratificazione dovuta a variazioni di temperatura e salinità. Il sistema risultante, noto come equazioni primitive dell'oceanografia, include la forza di Coriolis $f_C = 2\Omega \times v$, dove $\Omega$ è il vettore velocità angolare della Terra. Questa forza, apparente nel sistema di riferimento rotante solidale con la Terra, deflette il movimento delle masse d'acqua verso destra nell'emisfero nord e verso sinistra nell'emisfero sud, un effetto cruciale per la formazione dei grandi giri oceanici.

La circolazione oceanica su grande scala è dominata dalle correnti superficiali guidate dai venti e dalle correnti termoaline guidate da gradienati di densità. Le correnti superficiali, come la Corrente del Golfo nell'Atlantico settentrionale o la Corrente di Kuroshio nel Pacifico, trasportano enormi quantità di energia termica e hanno influenzato profondamente le possibilità di navigazione e colonizzazione umana. La

teoria di queste correnti inizia con il lavoro pionieristico di Harald Sverdrup, Henry Stommel e Walter Munk negli anni '40 e '50 del XX secolo.

Un modello semplificato ma illuminante è fornito dall'equazione di Sverdrup per il trasporto meridionale: $\beta V = \text{curl}_z(\tau/\rho H)$, dove V è la componente meridionale del trasporto integrato in profondità, $\beta = df/dy$ è il gradiente meridionale del parametro di Coriolis $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ (con $\varphi$ la latitudine), $\tau$ è lo stress del vento alla superficie, $\rho$ la densità dell'acqua e H la profondità dell'oceano. Questa equazione, derivata dall'equilibrio tra stress del vento e forza di Coriolis, spiega perché i giri oceanici subtropicali ruotano in senso orario nell'emisfero nord e antiorario nell'emisfero sud, seguendo la circolazione dei venti atmosferici.

L'intensificazione delle correnti sul bordo occidentale degli oceani, un fenomeno osservato universalmente (Corrente del Golfo, Corrente del Brasile, Corrente di Kuroshio, Corrente delle Agulhas), fu spiegata da Stommel nel 1948 attraverso un modello che incorpora la variazione del parametro di Coriolis con la latitudine. L'equazione di Stommel, una versione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes per un oceano di profondità costante in regime stazionario, è: $\beta \partial\psi/\partial x = -r\nabla^2\psi + \text{curl}_z(\tau)/\rho H$, dove $\psi$ è la funzione di corrente (tale che $v = \nabla \times (\psi e_z)$) e r è un coefficiente di attrito. La soluzione di questa equazione mostra che la maggior parte del trasporto di ritorno del giro oceanico è concentrata in una stretta fascia sul bordo occidentale, con larghezza caratteristica $\delta_M \approx \sqrt{(r/\beta)}$, tipicamente dell'ordine di 100 km.

Queste correnti intensificate sul bordo occidentale hanno avuto un impatto determinante sulla navigazione storica. La Corrente del Golfo, che fluisce verso nord lungo la costa orientale del Nord America con velocità che possono superare i 2 metri al secondo, rappresentava una via privilegiata per le navi europee di ritorno dalle Americhe. La conoscenza e lo sfruttamento di questa corrente divennero rapidamente cruciali per le potenze coloniali europee nel XVI e XVII secolo. Analogamente, la Corrente di Kuroshio facilitava la navigazione lungo le coste dell'Asia orientale e influenzava le rotte tra Cina, Giappone e Filippine.

Un aspetto particolarmente rilevante per la storia delle migrazioni è rappresentato dalle correnti equatoriali e dai pattern di circolazione nel Pacifico tropicale. Il sistema delle correnti equatoriali, costituito dalla Corrente Equatoriale del Nord, dalla Corrente Equatoriale del Sud e dalla Controcorrente Equatoriale che scorre verso est tra le due, ha reso possibile i grandi viaggi di esplorazione e colonizzazione polinesiana attraverso il Pacifico. I navigatori polinesiani, partendo dal Sud-Est asiatico circa 3500 anni fa, colonizzarono progressivamente le isole del Pacifico raggiungendo le Hawaii, l'Isola di Pasqua e la Nuova Zelanda, in uno dei più straordinari esempi di esplorazione marittima nella storia umana.

La dinamica della colonizzazione polinesiana può essere compresa attraverso modelli matematici che combinano la circolazione oceanica con strategie di navigazione. Esperimenti di simulazione basati sulle equazioni di Navier-Stokes per ricostruire i pattern di correnti, combinati con dati sui venti prevalenti e modelli di navigazione, hanno permesso di testare diverse ipotesi sulle rotte seguite dai migranti polinesiani. Questi studi indicano che, sebbene le correnti dominanti nel Pacifico tropicale scorrano prevalentemente da est verso ovest, esistono finestre temporali stagionali e condizioni di vento favorevoli che permettevano la navigazione contro le correnti dominanti, specialmente sfruttando la Controcorrente Equatoriale e le variazioni associate al ciclo di El Niño-Oscillazione Meridionale (ENSO).

Il fenomeno di El Niño, una fluttuazione quasi-periodica del sistema accoppiato oceano-atmosfera nel Pacifico equatoriale con periodo tipico di 3-7 anni, modifica drasticamente i pattern di correnti e venti nel Pacifico tropicale. Durante gli eventi di El Niño, l'indebolimento degli alisei permette l'accumulo di acqua

calda nella parte orientale del Pacifico e inverte parzialmente i pattern normali di circolazione. Studi recenti suggeriscono che i navigatori polinesiani potrebbero aver sfruttato deliberatamente queste fluttuazioni climatiche per facilitare la colonizzazione di isole remote contro le correnti dominanti.

La circolazione termoalina globale, spesso chiamata "nastro trasportatore oceanico", rappresenta un ulteriore aspetto delle correnti oceaniche con profonde implicazioni storiche. Questo sistema di circolazione tridimensionale, guidato da differenze di densità causate da variazioni di temperatura e salinità, trasporta calore e nutrienti su scala globale. La Corrente del Golfo fa parte di questo sistema più ampio: le acque calde superficiali dell'Atlantico tropicale scorrono verso nord, rilasciano calore nell'atmosfera riscaldando l'Europa occidentale, si raffreddano e diventano più dense nelle regioni subpolari, sprofondano formando la North Atlantic Deep Water e ritornano verso sud in profondità.

Questo sistema di circolazione può essere descritto attraverso una versione estesa delle equazioni di Navier-Stokes che include l'equazione di trasporto per temperatura T e salinità S: $\partial T/\partial t + v \cdot \nabla T = \kappa_T \nabla^2 T + Q_T$, $\partial S/\partial t + v \cdot \nabla S = \kappa_S \nabla^2 S + Q_S$, dove $\kappa_T$ e $\kappa_S$ sono i coefficienti di diffusività termica e salina e $Q_T$, $Q_S$ rappresentano sorgenti e pozzi di calore e sale. La densità del fluido dipende da temperatura e salinità attraverso un'equazione di stato $\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T-T_0) + \alpha_S(S-S_0))$, che chiude il sistema accoppiando dinamica e termodinamica.

La stabilità della circolazione termoalina è una questione di grande rilevanza sia per comprendere eventi climatici passati sia per prevedere cambiamenti futuri. Paleodati indicano che il sistema ha subito transizioni abrupte in passato, come il Younger Dryas (circa 12800-11500 anni fa), quando un massiccio afflusso di acqua dolce dallo scioglimento delle calotte glaciali interruppe la formazione di acque profonde nell'Atlantico settentrionale, causando un raffreddamento repentino nell'emisfero nord. Questi eventi hanno avuto impatti drammatici sulle possibilità di abitazione umana e sulle rotte migratorie in periodi cruciali della preistoria.

Modelli matematici semplificati della circolazione termoalina, sviluppati da Henry Stommel e successivamente elaborati da numerosi ricercatori, mostrano che il sistema può esistere in multipli stati di equilibrio, alcuni stabili e altri instabili. Un modello concettuale a scatole descrive lo scambio tra una scatola tropicale calda e salata e una scatola polare fredda e relativamente dolce. L'equazione governante semplificata è $dq/dt = c_1(\alpha_T \Delta T - \alpha_S \Delta S) - dq$, dove q è il tasso di circolazione, $\Delta T$ e $\Delta S$ le differenze di temperatura e salinità tra le scatole, e d un coefficiente di dissipazione. Questa equazione non-lineare può avere uno, due o tre punti fissi a seconda dei parametri, e transizioni tra stati possono essere innescate da perturbazioni sufficientemente grandi.

La comprensione quantitativa delle correnti oceaniche attraverso le equazioni di Navier-Stokes ha anche permesso di ricostruire le condizioni di navigazione in periodi storici specifici. Ad esempio, l'espansione vichinga verso l'Islanda, la Groenlandia e brevemente il Nord America (Vinland) tra l'VIII e l'XI secolo fu facilitata da un periodo climatico più caldo (il Medieval Warm Period) che ridusse l'estensione del ghiaccio marino artico e rese più navigabili le rotte nordatlantiche. Simulazioni numeriche delle correnti oceaniche e dei venti per questo periodo, basate su ricostruzioni paleoclimatiche, mostrano condizioni effettivamente più favorevoli alla navigazione nelle latitudini subartiche rispetto ai secoli precedenti e successivi.

Analogamente, il declino degli insediamenti vichinghi in Groenlandia nel XIV e XV secolo coincise con l'inizio della Piccola Era Glaciale, quando l'espansione del ghiaccio marino e il raffreddamento delle temperature resero molto più difficili le comunicazioni marittime tra Groenlandia e Islanda o Scandinavia. La modellazione matematica delle correnti e della distribuzione del ghiaccio marino durante questo

periodo supporta l'ipotesi che l'isolamento crescente degli insediamenti, dovuto al deterioramento delle condizioni oceaniche, abbia contribuito significativamente al loro abbandono.

Un altro esempio notevole dell'impatto delle correnti oceaniche sulla storia riguarda le rotte commerciali dell'Oceano Indiano. Il monsone nell'Oceano Indiano crea un pattern stagionale di venti e correnti che fu sfruttato per millenni dai mercanti che collegavano l'Africa orientale, la Penisola arabica, l'India e il Sud-Est asiatico. Durante i mesi estivi (giugno-settembre), il monsone sud-occidentale porta venti e correnti che facilitano la navigazione dall'Arabia e dall'Africa verso l'India, mentre durante l'inverno (dicembre-febbraio) il monsone nord-orientale inverte la direzione permettendo il viaggio di ritorno. Questo sistema di circolazione atmosferica e oceanica, descritto dalle equazioni di Navier-Stokes accoppiate per atmosfera e oceano, rese possibile una rete commerciale estremamente attiva già nell'antichità, facilitando scambi culturali, religiosi e genetici attraverso l'Oceano Indiano.

# Fronti di invasione biologica e velocità di propagazione delle specie invasive

I fronti di invasione biologica rappresentano uno dei fenomeni ecologici più rilevanti dell'era contemporanea e costituiscono un'applicazione paradigmatica della teoria matematica delle equazioni differenziali parziali. Le specie invasive, introdotte intenzionalmente o accidentalmente dall'uomo in nuovi habitat al di fuori del loro areale nativo, possono espandersi rapidamente causando impatti ecologici, economici e sanitari significativi. La comprensione matematica della velocità e dei pattern di propagazione di queste invasioni è essenziale per sviluppare strategie efficaci di prevenzione e controllo.

La teoria dei fronti di invasione si basa sui modelli di reazione-diffusione già discussi nel contesto dell'espansione agricola, ma con importanti specificità legate alla biologia delle specie e alle caratteristiche degli ecosistemi invasi. Il modello di base rimane l'equazione di Fisher-KPP, ma numerose estensioni sono state sviluppate per incorporare aspetti realistici della dinamica delle popolazioni e della dispersione.

Un primo raffinamento importante riguarda la descrizione della dispersione. Mentre l'equazione del calore assume una dispersione locale Fickiana (basata su un random walk con salti infinitesimali), molte specie mostrano pattern di dispersione a lunga distanza caratterizzati da code pesanti nella distribuzione delle distanze di dispersione. Matematicamente, questo può essere descritto sostituendo il laplaciano $\partial^2 u/\partial x^2$ con operatori di diffusione frazionari o integrali del tipo $D \int K(x-y)(u(y,t) - u(x,t))dy$, dove il kernel $K(x)$ decà come una legge di potenza per grandi x piuttosto che esponenzialmente. Questi operatori non-locali generano fronti di invasione che si accelerano nel tempo, con velocità che cresce asintoticamente come $t^{(\alpha/(2-\alpha))}$ per distribuzioni di dispersione con code che decadono come $x^{(-(1+\alpha))}$ con $0 < \alpha < 2$.

Un esempio concreto di invasione biologica ben studiato è l'espansione del coleottero asiatico Harmonia axyridis (coccinella arlecchino) in Europa e Nord America dopo introduzioni accidentali negli anni '80 e '90. Questa specie, introdotta originariamente per il controllo biologico di afidi, si è espansa con velocità dell'ordine di 100-250 km/anno, molto più rapide di quanto previsto da modelli di diffusione locale. Analisi matematiche hanno mostrato che questa rapida espansione è compatibile con eventi di dispersione a lunga distanza, probabilmente facilitati dal trasporto passivo su veicoli umani. Il modello integro-differenziale con kernel di dispersione a coda pesante riproduce accuratamente le velocità osservate quando calibrato con dati sperimentali sulla distribuzione delle distanze di dispersione.

Un altro aspetto cruciale nella modellizzazione delle invasioni biologiche riguarda il ritardo temporale (time lag) che spesso si osserva tra l'introduzione di una specie e l'inizio della fase esponenziale di

espansione. Questo fenomeno può essere descritto matematicamente attraverso l'equazione di reazione-diffusione con ritardo: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + ru(t-\tau)(1 - u/K)$, dove $\tau$ è il tempo di ritardo nella risposta riproduttiva. La presenza del ritardo può destabilizzare l'equilibrio stazionario e generare oscillazioni temporali nella densità di popolazione durante l'espansione. L'analisi di stabilità lineare mostra che il sistema è stabile se $r\tau < \pi/2$ e diventa instabile per ritardi più lunghi, generando fronti oscillanti con periodiche esplosioni demografiche seguite da crolli.

La dinamica di invasione diventa particolarmente complessa quando la specie invasiva interagisce con comunità ecologiche native. Un modello minimale considera l'interazione tra una specie invasiva (u) e una specie nativa competitrice (v): $\partial u/\partial t = D_u\nabla^2 u + r_u u(1 - (u + \alpha_{uv}v)/K_u)$, $\partial v/\partial t = D_v\nabla^2 v + r_v v(1 - (v + \alpha_{vu}u)/K_v)$, dove $\alpha_{uv}$ e $\alpha_{vu}$ misurano l'intensità della competizione interspecifica. Se la specie invasiva ha un vantaggio competitivo (ad esempio $r_u/K_u > r_v/K_v$), il sistema ammette soluzioni a fronte viaggiante in cui l'invasiva sostituisce progressivamente la nativa. La velocità del fronte dipende da tutti i parametri del sistema e può essere calcolata attraverso tecniche di analisi di stabilità lineare o metodi numerici.

Un esempio ecologicamente rilevante è l'invasione delle foreste nordamericane da parte del cervo volante asiatico (Agrilus planipennis), che ha decimato le popolazioni di frassino (Fraxinus spp.) in vaste regioni. La dinamica può essere modellata con un sistema predatore-preda modificato dove il cervo volante (u) è il predatore specializzato e il frassino (v) è la preda: $\partial u/\partial t = D_u\nabla^2 u + a\,u\,v/(1+bhv) - m_u\,u$, $\partial v/\partial t = D_v\nabla^2 v + r_v\,v(1 - v/K_v) - c\,u\,v/(1+bhv)$, dove a è il tasso di conversione da preda a predatori, c il tasso di consumo, $m_u$ la mortalità del predatore e h il tempo di handling della preda. Questo sistema può mostrare fronti di invasione caratterizzati da una drammatica riduzione della popolazione di prede seguita dal collasso locale dei predatori, creando onde di devastazione ecologica.

La velocità di propagazione dei fronti di invasione dipende criticamente dalle condizioni al contorno e dalla forma del fronte. Per fronti che si propagano da una sorgente puntiforme, la geometria diventa cruciale. In due dimensioni, un fronte circolare che si espande radialmente dalla sorgente ha una velocità radiale che converge asintoticamente alla velocità del fronte piano, ma può mostrare correzioni transitorie. Per una specie che si espande da un'introduzione puntiforme, la densità assume approssimativamente la forma $u(r,t) \approx K\,\Theta(ct - r)$ per grandi tempi, dove $\Theta$ è la funzione di Heaviside e r è la distanza radiale dal punto di introduzione. L'area invasa cresce quindi come $\pi c^2 t^2$, indicando un'espansione accelerata dell'area totale anche se la velocità radiale è costante.

Le barriere geografiche e le eterogeneità ambientali modificano sostanzialmente la dinamica di invasione. Consideriamo un habitat frammentato dove regioni adatte all'invasione sono separate da aree inadatte. Questo può essere modellato attraverso parametri spazialmente variabili: $\partial u/\partial t = \nabla\cdot(D(x)\nabla u) + r(x)u(1 - u/K(x))$, dove D, r e K assumono valori elevati nelle zone adatte e valori molto bassi o nulli nelle zone inadatte. La propagazione attraverso tali ambienti frammentati dipende dalla configurazione spaziale dei frammenti. Se i frammenti adatti sono troppo distanti, la distanza di dispersione media potrebbe non essere sufficiente a colmare i gap e l'invasione si arresta. Esiste una distanza critica di frammentazione oltre la quale l'invasione diventa impossibile, un concetto analogo alla distanza minima di percolazione discussa più avanti.

Un aspetto particolarmente interessante riguarda l'effetto Allee, una dinamica demografica in cui il tasso di crescita per capita è ridotto a basse densità, dovuto a difficoltà nel trovare compagni, cooperazione ridotta o predazione aumentata. L'effetto Allee può essere incorporato modificando il termine di crescita: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + ru(1 - u/K)(u/A - 1)$, dove A è la soglia di Allee. Per $u < A$, il termine di crescita diventa negativo e la popolazione declina. Questa non-linearità modifica profondamente la dinamica del

fronte: esiste ora una densità minima necessaria per sostenere l'invasione. Fronti con densità iniziale troppo bassa non riescono a propagarsi e collassano. Matematicamente, la velocità del fronte diventa $c = \sqrt{(2D\ r(1 - A/K))}$, valida solo per soluzioni che superano la soglia di Allee. Questo predice che piccole introduzioni iniziali di specie con forte effetto Allee hanno bassa probabilità di stabilirsi, mentre introduzioni massive possono innescare invasioni rapide, un fenomeno osservato empiricamente in molte invasioni biologiche.

La considerazione di strutture di età o stadio nella popolazione invasiva richiede modelli ancora più sofisticati. Per molte specie, la capacità di dispersione varia drammaticamente con l'età o lo stadio di sviluppo. Un modello strutturato può essere formulato come: $\partial u_i/\partial t = D_i \nabla^2 u_i + f_i(u_1, u_2, ..., u_n)$, dove $u_i(x,t)$ rappresenta la densità dello stadio i-esimo e $f_i$ descrive transizioni tra stadi, nascite e mortalità. Per molte specie di insetti, ad esempio, solo gli adulti sono mobili mentre le larve sono stazionarie. In questi casi, il sistema accoppia equazioni di diffusione per gli adulti con equazioni di reazione locali per gli stadi immaturi, generando dinamiche complesse con possibile formazione di pattern spaziali oscillanti dietro il fronte di invasione.

La gestione delle invasioni biologiche richiede strategie di intervento che possono essere analizzate matematicamente nel framework delle equazioni di reazione-diffusione. Le strategie includono eradicazione nelle fasi iniziali quando l'area invasa è ancora limitata, contenimento attraverso barriere o zone di controllo intensivo, e controllo biologico mediante introduzione di nemici naturali. L'efficacia di queste strategie può essere valutata aggiungendo termini di controllo alle equazioni: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + ru(1 - u/K) - h(x,t)u$, dove $h(x,t)$ rappresenta lo sforzo di controllo spazialmente e temporalmente distribuito. L'analisi ottimale richiede la minimizzazione di un funzionale di costo che bilancia i danni dell'invasione contro i costi dell'intervento, tipicamente formulato come un problema di controllo ottimale.

Studi teorici hanno dimostrato che per eradicare un'invasione nelle fasi iniziali è necessario applicare uno sforzo di controllo che superi il tasso intrinseco di crescita su un'area sufficientemente grande. Se l'area controllata è troppo piccola, l'immigrazione dai bordi ricolonizza rapidamente la zona e il controllo fallisce. Matematicamente, questo si traduce nell'analisi del raggio critico $R_c$ di una zona di controllo circolare necessario per l'eradicazione. Per semplici modelli di reazione-diffusione, $R_c \approx \pi\sqrt{(D/r)}$, derivato dall'analisi degli autovalori dell'operatore linearizzato con condizioni al contorno appropriate.

La teoria delle invasioni biologiche ha anche importanti connessioni con la genetica delle popolazioni. Durante l'espansione, la popolazione al fronte subisce ripetuti effetti del fondatore e riduzione della diversità genetica. Modelli che accoppiano l'equazione di Fisher-KPP con equazioni per le frequenze alleliche predicono che mutazioni deleterie possono essere trascinate ("surfing") dal fronte di espansione e raggiungere alte frequenze, un fenomeno noto come "expansion load". Questo ha implicazioni per l'adattabilità evolutiva delle popolazioni invasive e per la loro capacità di evolversi rapidamente in risposta al nuovo ambiente.

# Percolazione di foreste e malattie su reticoli geografici

La teoria della percolazione rappresenta un framework matematico fondamentale per comprendere la connettività e la propagazione su reti spazialmente strutturate. Originariamente sviluppata nel contesto della fisica statistica per descrivere il flusso di fluidi attraverso mezzi porosi, la teoria della percolazione ha trovato applicazioni straordinariamente ampie in ecologia, epidemiologia, scienze dei materiali e teoria delle reti. Nel contesto geografico, la percolazione descrive fenomeni come la connettività di habitat

frammentati, la propagazione di incendi forestali e la diffusione di malattie in popolazioni spazialmente distribuite.

Il modello di percolazione più semplice è la percolazione su reticolo. Consideriamo un reticolo regolare (ad esempio un reticolo quadrato) in cui ogni sito è occupato con probabilità p e vuoto con probabilità 1-p. Una configurazione percolante è quella in cui esiste un cammino continuo di siti occupati che attraversa l'intero sistema da un lato all'altro. La probabilità che il sistema percoli dipende criticamente dalla probabilità di occupazione p: esiste una soglia di percolazione $p_c$ tale che per $p < p_c$ la probabilità di percolazione tende a zero nel limite termodinamico (sistema infinito), mentre per $p > p_c$ la percolazione avviene con probabilità finita.

Per il reticolo quadrato in due dimensioni, la soglia di percolazione per la percolazione per siti è $p_c \approx 0.593$, mentre per la percolazione per legami (dove i legami tra siti vicini sono presenti con probabilità p) è esattamente $p_c = 1/2$. Questi valori critici dipendono dalla geometria del reticolo: per il reticolo triangolare $p_c = 1/2$ per la percolazione per siti, mentre per il reticolo esagonale $p_c \approx 0.697$.

Vicino alla soglia di percolazione, il sistema manifesta comportamento critico caratterizzato da leggi di potenza. La dimensione media del cluster di siti connessi al punto centrale (correlation length) diverge come $\xi \sim |p - p_c|^{(-\nu)}$ quando p si avvicina a $p_c$, con l'esponente critico $\nu \approx 4/3$ in due dimensioni. La probabilità che un sito scelto casualmente appartenga al cluster percolante infinito (se esiste) scala come $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$ con $\beta \approx 5/36$. Questi esponenti critici sono universali, dipendono solo dalla dimensionalità dello spazio e dalla simmetria del sistema, ma non dai dettagli microscopici del modello.

L'applicazione della teoria della percolazione alla frammentazione forestale fornisce intuizioni cruciali sulla connettività dell'habitat. Consideriamo una foresta in cui una frazione p dell'area è ricoperta da alberi, distribuiti spazialmente in modo casuale o seguendo pattern più strutturati. Gli organismi che dipendono dalla foresta possono muoversi solo attraverso aree forestate connesse. Quando la copertura forestale scende sotto la soglia di percolazione, il sistema si frammenta in molteplici cluster isolati e la connettività a grande scala viene persa. Questo ha conseguenze drammatiche per specie che richiedono grandi territori o che dipendono dalla dispersione su lunghe distanze per il flusso genico.

Modelli di percolazione più realistici incorporano correlazioni spaziali nella distribuzione degli habitat. La deforestazione non avviene uniformemente a caso ma segue pattern determinati da accessibilità, valore economico della terra e topografia. Questi pattern correlati possono essere modellati attraverso percolazione correlata, dove la probabilità di occupazione dei siti vicini è correlata. Studi hanno mostrato che correlazioni positive nella deforestazione (taglio di aree contigue) riducono la soglia di percolazione, rendendo il sistema più vulnerabile alla frammentazione rispetto alla deforestazione casuale.

Un'equazione differenziale che connette la percolazione alla dinamica continua è l'equazione di percolazione diretta (directed percolation), che descrive la propagazione di un processo di contatto su un reticolo: $du_i/dt = \Sigma_j a_{ij} u_j(1-u_i) - u_i$, dove $u_i$ è la probabilità di occupazione del sito i, la somma è sui siti vicini j, e $a_{ij}$ è il tasso di trasmissione da j a i. Questa equazione descrive la competizione tra attivazione da siti vicini occupati e disattivazione spontanea. Nel limite continuo, diventa un'equazione di reazione-diffusione con termine di crescita che si annulla a $u = 0$ e $u = 1$: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + \lambda u(1-u) - \mu u$, dove $\lambda$ è il tasso di attivazione e $\mu$ di disattivazione. Il sistema mostra una transizione di fase per $\lambda/\mu = \lambda_c$, analoga alla soglia di percolazione.

La propagazione di incendi forestali può essere modellata come un processo di percolazione. In un modello semplice, ogni albero può essere in tre stati: verde (non bruciato), in fiamma, o bruciato. Il fuoco si propaga da alberi in fiamma agli alberi verdi vicini con una certa probabilità, gli alberi in fiamma

bruciano per un tempo finito e poi diventano bruciati. La dimensione finale dell'incendio dipende criticamente dalla densità di alberi: per densità sotto la soglia di percolazione, gli incendi rimangono localizzati, mentre sopra la soglia possono propagarsi su grandi distanze.

Un modello continuo per la propagazione del fuoco può essere formulato come: $\partial u/\partial t = -\alpha u$, $\partial v/\partial t = \alpha u - \beta v + \gamma v \nabla^2 u$, dove u(x,t) è la densità di biomassa incombucra e v(x,t) l'intensità del fronte di fuoco. Il parametro $\alpha$ controlla la velocità di combustione, $\beta$ il tasso di decadimento del fronte di fuoco e $\gamma$ descrive la propagazione del fuoco verso nuova biomassa. Questo sistema genera fronti di fuoco viaggianti la cui velocità dipende dalla densità di biomassa e dalle condizioni ambientali (vento, umidità).

La diffusione di malattie in popolazioni spazialmente strutturate rappresenta un'altra applicazione cruciale della teoria della percolazione. Il modello epidemiologico di base è il modello SIR (Susceptible-Infected-Recovered) spaziale: $\partial S/\partial t = -\beta SI$, $\partial I/\partial t = D\nabla^2 I + \beta SI - \gamma I$, $\partial R/\partial t = \gamma I$, dove S, I e R sono le densità di individui suscettibili, infetti e recuperati, $\beta$ è il tasso di trasmissione, $\gamma$ il tasso di recupero e D il coefficiente di diffusione degli infetti. Questo sistema genera onde epidemiche che si propagano spazialmente con velocità che dipende dal numero riproduttivo di base $R_0 = \beta S_0/\gamma$.

Nel contesto della percolazione, una malattia può diffondersi attraverso una popolazione solo se la densità di individui suscettibili è sufficientemente alta da permettere catene di trasmissione continue. Esiste una densità critica di suscettibili sotto la quale le epidemie rimangono localizzate. Questa soglia è analoga alla soglia di percolazione ed è determinata dal numero riproduttivo di base: se $R_0 < 1$, ogni infetto trasmette in media a meno di un individuo e l'epidemia si estingue; se $R_0 > 1$, la trasmissione è sostenuta e l'epidemia può diffondersi.

L'eterogeneità spaziale nella densità di popolazione crea pattern complessi di percolazione epidemica. Nelle aree urbane ad alta densità, la trasmissione è facilitata e gli scoppi epidemici sono più probabili, mentre nelle aree rurali a bassa densità la trasmissione è più difficile. Modelli che incorporano questa eterogeneità attraverso coefficienti spazialmente variabili mostrano che le città fungono da "hub" da cui le epidemie si diffondono lungo le reti di trasporto verso altre aree urbane, creando pattern di percolazione su reti complesse piuttosto che su reticoli regolari.

La Peste Nera del XIV secolo, che uccise circa un terzo della popolazione europea, rappresenta un esempio storico di percolazione epidemica su larga scala. La malattia si diffuse lungo le rotte commerciali marittime e terrestri, propagandosi preferenzialmente tra città connesse da commerci intensi. Modelli di percolazione su reti di città medievali, dove i legami rappresentano rotte commerciali e la probabilità di trasmissione dipende dall'intensità del commercio, riproducono ragionevolmente bene i pattern spazio-temporali documentati dell'epidemia. La velocità di propagazione fu relativamente lenta (circa 2-4 km/giorno in media) rispetto alla mobilità umana, riflettendo il fatto che la trasmissione richiedeva l'establishment locale della malattia e delle popolazioni di vettori (pulci) prima della successiva propagazione.

Un aspetto matematicamente interessante riguarda la percolazione invasiva, dove il processo di occupazione dei siti avviene dinamicamente piuttosto che essere determinato a priori. In questo modello, si parte da un sito inizialmente occupato e ad ogni passo temporale i siti vuoti adiacenti a siti occupati vengono occupati con una certa probabilità. Questo genera cluster di siti occupati che crescono nel tempo. La forma di questi cluster e la loro velocità di crescita dipendono dalla probabilità di invasione. Per probabilità sotto una soglia critica, i cluster sono compatti (hanno dimensione frattale pari alla dimensione euclidea dello spazio), mentre sopra la soglia diventano ramificati con dimensione frattale ridotta.

La connessione tra percolazione discreta su reticoli e equazioni differenziali parziali continue può essere stabilita attraverso procedure di limite continuo. Considerando un reticolo con spaziatura a e facendo tendere a → 0 mentre si scala opportunamente i parametri, si ottengono equazioni di campo medio che descrivono l'evoluzione della densità locale di occupazione. Per la percolazione diretta, il limite continuo conduce all'equazione $\partial \rho/\partial t = D\nabla^2\rho + (\lambda - \mu)\rho - g\rho^2$, dove $\rho$ è la densità locale di siti attivi, D è un coefficiente di diffusione effettivo e g un coefficiente di interazione. Questa equazione cattura molte proprietà qualitative della percolazione ma perde alcuni aspetti critici legati alle fluttuazioni su piccola scala.

La percolazione su reticoli disordinati, dove la probabilità di occupazione varia da sito a sito secondo una distribuzione casuale, introduce ulteriore complessità. Questo modello è particolarmente rilevante per descrivere la propagazione attraverso ambienti realistici con eterogeneità intrinseca. La soglia di percolazione in sistemi disordinati dipende dai dettagli della distribuzione del disordine. Per distribuzioni con code pesanti, dove alcuni siti hanno probabilità di occupazione molto elevate, la soglia di percolazione può essere significativamente ridotta rispetto al caso omogeneo, riflettendo il fatto che pochi "super-diffusori" possono dominare la connettività globale.

Applicazioni recenti della teoria della percolazione in epidemiologia hanno considerato reti di contatti sociali, dove i nodi rappresentano individui e i legami rappresentano contatti attraverso cui può avvenire la trasmissione. Su tali reti, la percolazione determina se un'epidemia può diffondersi attraverso la popolazione. La distribuzione dei gradi (numero di contatti per individuo) è cruciale: reti con distribuzione a coda pesante (come le reti scale-free che caratterizzano molte reti sociali) hanno soglia di percolazione drasticamente ridotta e sono particolarmente vulnerabili alle epidemie. Matematicamente, per una rete con distribuzione di grado P(k), la condizione per la percolazione è che il momento secondo della distribuzione soddisfi $\langle k^2\rangle/\langle k\rangle > 2$, dove $\langle k\rangle$ è il grado medio e $\langle k^2\rangle$ il momento secondo.

La teoria della percolazione fornisce anche intuizioni sulle strategie ottimali di vaccinazione o intervento per prevenire la diffusione di epidemie. Vaccinare casualmente una frazione p della popolazione riduce il numero riproduttivo effettivo a $R_{eff} = R_0(1-p)$. Per prevenire un'epidemia è necessario $R_{eff} < 1$, che richiede $p > 1 - 1/R_0$. Tuttavia, strategie mirate che vaccinano preferenzialmente individui altamente connessi (hub nella rete) possono raggiungere lo stesso obiettivo con frazioni vaccinate molto inferiori. Su reti scale-free, vaccinare i nodi con grado più alto può prevenire completamente la percolazione anche con vaccinazione di una piccola frazione della popolazione, una strategia nota come immunizzazione mirata.

# Modelli gravitazionali per flussi migratori: la legge di gravità sociale

I modelli gravitazionali rappresentano un approccio radicalmente diverso alla modellizzazione dei flussi migratori, basato non su equazioni differenziali parziali evolutive ma su leggi di interazione istantanea analoghe alla legge di gravitazione universale di Newton. Nonostante questa diversità formale, i modelli gravitazionali catturano aspetti complementari dei fenomeni migratori e possono essere integrati con gli approcci basati su PDE per ottenere descrizioni più complete.

La forma base del modello gravitazionale per i flussi migratori tra due località i e j è data dall'equazione $F_{ij} = G\,(M_i^{\alpha}\, M_j^{\beta})/(d_{ij}^{\gamma})$, dove $F_{ij}$ è il flusso di migranti dalla località i alla località j, $M_i$ e $M_j$ sono le "masse" delle due località (tipicamente popolazioni o indicatori di attività economica), $d_{ij}$ è la distanza tra le località, e G, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sono parametri da stimare empiricamente. Questa

formulazione, proposta per la prima volta da George Kingsley Zipf nel 1946 e successivamente raffinata da numerosi ricercatori, cattura l'intuizione che i flussi migratori dovrebbero essere proporzionali alle dimensioni delle località di origine e destinazione e inversamente proporzionali a qualche potenza della distanza.

L'analogia con la gravitazione è puramente formale ma suggestiva: così come masse gravitazionali si attraggono con forza proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza, località con grandi popolazioni o economie attraggono e generano più migranti, mentre la distanza agisce come deterrente. La forma matematica precisa e i valori degli esponenti devono essere determinati empiricamente e variano a seconda del contesto geografico, del periodo storico e del tipo di migrazione considerata.

Studi empirici su flussi migratori interni in molti paesi hanno tipicamente trovato esponenti $\alpha \approx 1$, $\beta \approx 1$, e $\gamma \approx 1$-2, suggerendo che i flussi sono approssimativamente proporzionali al prodotto delle popolazioni e decrescono con la distanza più lentamente che in una legge dell'inverso del quadrato gravitazionale (dove $\gamma = 2$). L'esponente della distanza $\gamma$ varia considerevolmente: valori più bassi ($\gamma \approx 1$) indicano che la distanza è un deterrente relativamente debole, mentre valori più alti ($\gamma \approx 2$-3) indicano forte attrito della distanza. Nell'era della globalizzazione e delle comunicazioni moderne, l'esponente della distanza tende a diminuire nel tempo, riflettendo la riduzione dei costi di trasporto e comunicazione.

Una derivazione teorica del modello gravitazionale può essere ottenuta da principi di massima entropia. Supponiamo di avere $N_i$ persone nella località i e di voler distribuirle tra le destinazioni j in modo da massimizzare l'entropia (ovvero minimizzare l'informazione o la struttura nel sistema) soggetto a vincoli sulla popolazione totale e su qualche costo aggregato di migrazione. L'entropia del sistema di flussi è $S = -\Sigma_{ij} F_{ij} \ln(F_{ij})$. Massimizzando S soggetto ai vincoli $\Sigma_j F_{ij} = O_i$ (flusso totale in uscita da i), $\Sigma_i F_{ij} = D_j$ (flusso totale in entrata a j), e $\Sigma_{ij} F_{ij} c_{ij} = C$ (costo totale, dove $c_{ij}$ è il costo di migrazione da i a j), si ottiene attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: $F_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp(-\lambda c_{ij})$, dove $A_i$, $B_j$ e $\lambda$ sono moltiplicatori di Lagrange determinati dai vincoli. Se il costo è proporzionale alla distanza, $c_{ij} = d_{ij}$, otteniamo $F_{ij} \propto O_i D_j \exp(-\lambda d_{ij})$, una forma esponenziale piuttosto che a legge di potenza.

La discrepanza tra la forma esponenziale derivata dalla massima entropia e la forma a legge di potenza osservata empiricamente ha generato notevole dibattito. Una possibile risoluzione è che il costo percepito della migrazione non sia semplicemente proporzionale alla distanza ma includa componenti che scalano diversamente. Alternativamente, l'esponenziale può essere approssimato localmente da una legge di potenza in certi regimi di distanza. Modelli più sofisticati utilizzano forme ibride: $F_{ij} = G (M_i M_j)/(d_{ij}^\gamma) \exp(-\theta d_{ij})$, combinando decadimento a legge di potenza per distanze brevi con decadimento esponenziale per distanze lunghe.

L'estensione del modello gravitazionale per incorporare fattori oltre alla semplice distanza geografica è cruciale per applicazioni realistiche. Fattori rilevanti includono differenze economiche (salari, opportunità di impiego), amenità ambientali, barriere linguistiche e culturali, politiche di immigrazione, reti sociali di migranti precedenti e costi di trasporto. Il modello esteso assume la forma: $F_{ij} = G (M_i^\alpha M_j^\beta)/(d_{ij}^\gamma) \cdot \exp(\Sigma_k \theta_k X_{ijk})$, dove $X_{ijk}$ sono variabili esplicative addizionali e $\theta_k$ i corrispondenti coefficienti. Per esempio, $X_{ijk}$ potrebbe includere il differenziale di reddito $(W_j - W_i)$, una dummy per lingua comune, la dimensione della diaspora già presente in j proveniente da i, ecc.

La stima econometrica dei modelli gravitazionali richiede attenzione a numerose questioni metodologiche. Una difficoltà fondamentale è la presenza di molti flussi nulli o molto piccoli nei dati reali, che pongono problemi per la stima in forma logaritmica. La specifica log-lineare standard $\log(F_{ij}) = \alpha \log(M_i) + \beta$

log(M_j) - γ log(d_{ij}) + ε_{ij} è inappropriata quando F_{ij} = 0, e scartare semplicemente queste osservazioni introduce bias di selezione. Metodi moderni utilizzano modelli Poisson o binomiali negativi che trattano esplicitamente i conteggi e permettono valori nulli: F_{ij} ~ Poisson(λ_{ij}) con log(λ_{ij}) = α log(M_i) + β log(M_j) - γ log(d_{ij}) + Σ_k θ_k X_{ijk}.

Un'altra questione cruciale riguarda l'endogeneità: le dimensioni delle località M_i e M_j non sono esogene ma sono esse stesse influenzate dai flussi migratori passati. Località che hanno ricevuto molti migranti in passato sono cresciute demograficamente ed economicamente, creando un feedback positivo che attrae ulteriori migranti. Questo richiede approcci strumentali o modelli dinamici che considerano esplicitamente l'evoluzione temporale delle popolazioni.

Un modello dinamico che integra l'approccio gravitazionale con equazioni differenziali per l'evoluzione delle popolazioni può essere formulato come: dM_i/dt = r_i M_i + Σ_j (F_{ji} - F_{ij}), dove r_i è il tasso di crescita naturale della popolazione i e la somma rappresenta l'immigrazione netta. I flussi F_{ij} sono determinati dalla legge gravitazionale istantanea in funzione delle popolazioni correnti M_i(t) e M_j(t). Questo sistema di equazioni differenziali ordinarie accoppiate descrive come le popolazioni evolvano sotto l'influenza combinata di dinamiche demografiche locali e redistribuzione migratoria.

L'analisi di stabilità di questo sistema dinamico rivela comportamenti interessanti. Se tutte le località hanno lo stesso tasso di crescita naturale e la migrazione è simmetrica, il sistema converge verso uno stato stazionario dove le popolazioni si distribuiscono secondo una legge di Zipf-Mandelbrot: M_i ∝ i^(-ζ) per le località ordinate per dimensione decrescente, con ζ tipicamente vicino a 1. Questa distribuzione di legge di potenza delle dimensioni urbane emerge naturalmente da modelli di crescita proporzionale con migrazione gravitazionale e trova notevole supporto empirico nella distribuzione delle popolazioni urbane a livello mondiale.

Quando le località hanno tassi di crescita naturale differenti o quando esistono asimmetrie nelle amenità o nelle opportunità economiche, il sistema può convergere verso configurazioni più complesse o mostrare oscillazioni persistenti. Se una località offre salari o opportunità significativamente superiori, può attrarre continuamente migranti e crescere indefinitamente rispetto alle altre, portando a concentrazione spaziale estrema. Questo fenomeno è alla base delle dinamiche di urbanizzazione e della formazione di megalopoli.

La connessione tra modelli gravitazionali discreti (che descrivono flussi tra località definite) e modelli continui basati su PDE può essere stabilita considerando il limite in cui le località diventano infinitamente dense nello spazio. In questo limite, la popolazione discreta M_i diventa una densità continua ρ(x,t) e il flusso discreto F_{ij} diventa un campo di flusso continuo J(x,t). L'equazione di continuità impone: ∂ρ/∂t + ∇·J = r(x)ρ, dove r(x) è il tasso di crescita naturale spazialmente variabile.

Il flusso J deve essere specificato in funzione della densità ρ. Un'approssimazione locale del modello gravitazionale suggerisce che il flusso verso un punto x sia proporzionale al gradiente di un potenziale gravitazionale: J = -D ρ ∇Φ, dove il potenziale soddisfa un'equazione di Poisson ∇²Φ = ρ. Sostituendo nell'equazione di continuità si ottiene: ∂ρ/∂t = ∇·(D ρ ∇Φ) + rρ con ∇²Φ = ρ. Questo sistema accoppiato di PDE descrive un processo di aggregazione mediato da interazioni non-locali, simile ai modelli di chemiotassi dove organismi si muovono verso concentrazioni più elevate di una sostanza chimica.

Tuttavia, questa approssimazione cattura solo parzialmente la fisica dei modelli gravitazionali, che sono intrinsecamente non-locali: il flusso tra due punti dipende dalla loro separazione finita, non solo dal gradiente locale. Una formulazione più accurata mantiene la natura non-locale: J(x,t) = ∫ K(x,y) ρ(x,t) ρ(y,t)

(y-x)/|y-x|^(γ+1) dy, dove K(x,y) è un kernel di interazione. L'equazione risultante $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot J = r\rho$ è un'equazione integro-differenziale che generalizza le usuali PDE locali.

Modelli gravitazionali sono stati applicati con successo a numerosi contesti storici e contemporanei. Uno studio classico riguarda le migrazioni dal Sud al Nord degli Stati Uniti durante la Grande Migrazione (1910-1970), quando circa sei milioni di Afroamericani si trasferirono dagli stati rurali del Sud verso città industriali del Nord. Modelli gravitazionali calibrati sui dati censuari spiegano circa il 60-70% della varianza nei flussi migratori osservati, con la popolazione delle città di destinazione, i differenziali salariali e la presenza di reti di migranti precedenti che emergono come predittori principali. La distanza mostra un effetto deterrente significativo ma decrescente nel tempo, riflettendo il miglioramento dei trasporti ferroviari e stradali.

Un'altra applicazione riguarda le migrazioni internazionali contemporanee. Modelli gravitazionali spiegano ragionevolmente bene i pattern di migrazione tra paesi, con PIL pro capite delle destinazioni, dimensione della popolazione di origine, distanza geografica, lingua comune e legami coloniali storici che emergono come determinanti chiave. L'esponente della distanza per le migrazioni internazionali è tipicamente più alto ($\gamma \approx 1.5$-$2$) rispetto alle migrazioni interne ($\gamma \approx 1$-$1.5$), riflettendo costi maggiori (finanziari, psicologici, legali) associati al movimento tra paesi.

Una limitazione fondamentale dei modelli gravitazionali puri è che non catturano dinamiche temporali complesse come ondate migratorie, fenomeni di isteresi o transizioni abrupte in pattern migratori. Questi fenomeni richiedono modelli dinamici che incorporino feedback, apprendimento e cambiamenti strutturali. Un'estensione importante introduce dipendenza dal percorso (path dependence): $F_{ij}(t) = G\,(M_i^{\alpha}\, M_j^{\beta})/(d_{ij}^{\gamma}) \cdot f(F_{ij}(t-1), F_{ij}(t-2), ...)$, dove la funzione f cattura come flussi passati influenzino flussi correnti attraverso la formazione di reti, la riduzione di costi informativi e la creazione di infrastrutture di migrazione. Questa formulazione genera dinamiche più ricche inclusi fenomeni di lock-in dove certi corridoi migratori, una volta stabiliti, persistono anche quando le condizioni economiche cambiano.

Modelli gravitazionali sono stati anche combinati con modelli basati su agenti (agent-based models) per incorporare eterogeneità individuale e decisioni a livello micro. In questi modelli ibridi, ogni individuo prende decisioni di migrazione basate su calcoli di utilità che bilanciano attrattività delle destinazioni (catturata da fattori gravitazionali) contro costi di migrazione e legami locali. L'aggregazione di queste decisioni individuali genera flussi macroscopici che possono essere confrontati con previsioni di modelli gravitazionali. Simulazioni mostrano che sotto assunzioni ragionevoli di eterogeneità individuale, i flussi aggregati convergono verso forme gravitazionali, fornendo una microfondazione dei modelli gravitazionali.

Una direzione recente di ricerca considera modelli gravitazionali su reti complesse, dove la "distanza" non è semplicemente geografica ma incorpora distanze in spazi multidimensionali (economico, sociale, culturale). In questo framework, $F_{ij} = G\,(M_i\, M_j)/(d_{ij}^{geo^{\gamma_1}} \cdot d_{ij}^{econ^{\gamma_2}} \cdot d_{ij}^{cult^{\gamma_3}})$, dove $d_{ij}^{geo}$, $d_{ij}^{econ}$, $d_{ij}^{cult}$ sono distanze geografica, economica e culturale. La stima empirica di questi modelli multidimensionali richiede tecniche sofisticate ma fornisce intuizioni più profonde sui determinanti della migrazione. Tipicamente, la distanza culturale (misurata ad esempio da differenze linguistiche o religiose) emerge come deterrente comparabile o superiore alla distanza geografica, specialmente per migrazioni a lungo termine.

# Sintesi e prospettive: verso un framework unificato

L'esplorazione sistematica delle equazioni differenziali parziali e dei modelli matematici applicati alle dinamiche spaziali umane e biologiche rivela una ricchezza di fenomeni e un'impressionante versatilità degli strumenti matematici. Dall'equazione del calore che descrive la diffusione graduale di innovazioni culturali, attraverso i modelli di reazione-diffusione che catturano l'interazione tra crescita locale e dispersione spaziale nelle espansioni agricole, fino alle complesse equazioni di Navier-Stokes che governano le correnti oceaniche che hanno plasmato le rotte migratorie storiche, emerge un quadro coerente in cui fenomeni apparentemente disparati sono unificati da principi matematici comuni.

La teoria delle equazioni differenziali parziali fornisce non solo strumenti descrittivi ma anche potere predittivo e comprensione profonda dei meccanismi causali. La formula $c^* = 2\sqrt{(Dr)}$ per la velocità di propagazione di fronti di Fisher-KPP non è semplicemente un risultato matematico astratto ma una previsione quantitativa verificabile che connette parametri osservabili (velocità di avanzamento di fronti agricoli) a parametri demografici fondamentali (tassi di dispersione e crescita). Analogamente, la teoria della percolazione non solo classifica topologie di connettività ma predice transizioni critiche quando sistemi attraversano soglie di frammentazione, con implicazioni dirette per la gestione di habitat e il controllo di epidemie.

Un aspetto particolarmente notevole è l'universalità di certi comportamenti matematici attraverso scale e contesti radicalmente diversi. Gli esponenti critici della percolazione sono gli stessi per la connettività forestale, la diffusione di malattie su reticoli e la conduzione elettrica in materiali disordinati. Le leggi di potenza nella distribuzione delle dimensioni urbane emergono da modelli gravitazionali di migrazione così come da modelli di crescita proporzionale stocastica. Fronti viaggianti con velocità $c = 2\sqrt{(Dr)}$ appaiono tanto nella genetica delle popolazioni quanto nella propagazione di incendi forestali. Questa universalità suggerisce che strutture matematiche profonde sottendono fenomeni superficialmente diversi.

Tuttavia, l'applicazione di modelli matematici a fenomeni umani e sociali richiede cautela epistemologica. Gli esseri umani non sono particelle passive che obbediscono deterministicamente a leggi di diffusione o gravitazionali, ma agenti intenzionali capaci di anticipazione, apprendimento e comportamento strategico. I modelli basati su PDE e leggi gravitazionali catturano comportamenti aggregati emergenti da miriadi di decisioni individuali, validi in limite statistico ma potenzialmente fragili quando applicati a piccoli numeri o situazioni in cui l'agency individuale è cruciale.

La validazione empirica dei modelli rimane una sfida centrale. Per fenomeni storici come l'espansione neolitica, i dati sono necessariamente incompleti e soggetti a incertezze archeologiche e di datazione. Per fenomeni contemporanei, sebbene i dati siano più abbondanti, questioni di causalità e identificazione rimangono complesse. La correlazione tra flussi migratori e fattori gravitazionali non implica automaticamente causalità, e modelli mal specificati possono generare previsioni spurie. Approcci moderni combinano modellazione matematica con inferenza causale rigorosa, esperimenti naturali e tecniche econometriche avanzate per rafforzare l'evidenza.

Le direzioni future della ricerca in questo campo sono molteplici e promettenti. L'integrazione di modelli basati su PDE con modelli basati su agenti offre la possibilità di connettere dinamiche micro e macro, catturando eterogeneità individuale mentre si mantiene trattabilità analitica per fenomeni aggregati. L'incorporazione di apprendimento e adattamento in modelli di reazione-diffusione potrebbe estendere la loro applicabilità a situazioni dove popolazioni modificano comportamenti in risposta a condizioni mutevoli. L'analisi di sistemi accoppiati che integrano dinamiche ecologiche, economiche e culturali rappresenta una frontiera particolarmente ricca ma sfidante.

I progressi in data science e disponibilità di dati ad alta risoluzione spaziale e temporale (da GPS tracking, remote sensing, sequenziamento genomico, registri amministrativi digitalizzati) offrono opportunità senza

precedenti per calibrare e testare modelli matematici con precisione molto maggiore rispetto al passato. Simultaneamente, lo sviluppo di metodi computazionali avanzati (machine learning, simulazioni su larga scala, algoritmi di ottimizzazione) permette di affrontare modelli di complessità precedentemente intrattabile.

La modellazione matematica delle dinamiche spaziali umane non è un esercizio puramente accademico ma ha rilevanza pratica diretta per sfide contemporanee urgenti. La gestione di specie invasive richiede previsioni accurate di dove e quando le invasioni si verificheranno e quali strategie di controllo saranno efficaci. La pianificazione di politiche di conservazione beneficia di modelli di connettività di habitat che identificano corridoi ecologici critici e soglie di frammentazione pericolose. La preparazione per pandemie richiede comprensione di come malattie si diffonderanno attraverso popolazioni connesse e quali interventi (vaccinazione, distanziamento sociale, restrizioni di viaggio) saranno più efficaci. La gestione di migrazioni di massa, che caratterizzeranno sempre più il XXI secolo sotto la pressione di cambiamenti climatici, instabilità politiche e disparità economiche, necessita di modelli che anticipino flussi futuri e identifichino punti di vulnerabilità e opportunità.

# Approfondimenti avanzati: teorie complementari e sviluppi recenti

## Pattern formation e instabilità di Turing nelle dinamiche spaziali

Un aspetto fondamentale delle equazioni di reazione-diffusione che merita trattazione approfondita riguarda la formazione spontanea di pattern spaziali attraverso le instabilità di Turing. Questo meccanismo, proposto da Alan Turing nel 1952 nel suo celebre articolo "The Chemical Basis of Morphogenesis", descrive come sistemi chimici o biologici omogenei possano spontaneamente sviluppare strutture spaziali periodiche attraverso l'interazione tra reazione locale e diffusione.

Il meccanismo di Turing richiede almeno due specie che interagiscono, tipicamente un attivatore e un inibitore, con coefficienti di diffusione differenti. Il sistema minimale è descritto da: $\partial u/\partial t = D_u \nabla^2 u + f(u,v)$, $\partial v/\partial t = D_v \nabla^2 v + g(u,v)$, dove u è l'attivatore, v l'inibitore e le funzioni f e g descrivono le cinetiche di reazione. L'idea chiave è che l'inibitore deve diffondere più rapidamente dell'attivatore ($D_v >> D_u$). Quando l'attivatore viene prodotto localmente, stimola anche la produzione dell'inibitore, ma quest'ultimo diffonde lontano più velocemente, creando una zona di inibizione attorno al punto attivato. Questo impedisce l'attivazione uniforme e genera pattern periodici.

L'analisi di stabilità lineare attorno a uno stato omogeneo stazionario ($u_0$, $v_0$) procede attraverso perturbazioni della forma $u = u_0 + \varepsilon \exp(\sigma t + ik\cdot x)$, $v = v_0 + \delta \exp(\sigma t + ik\cdot x)$. Sostituendo nel sistema linearizzato si ottiene il sistema algebrico che determina il tasso di crescita $\sigma$ come funzione del numero d'onda k: $\sigma(k) = (f_u + g_v - (D_u + D_v)k^2)/2 \pm \sqrt{[(f_u - g_v + (D_u - D_v)k^2)^2/4 + f_v g_u]}$, dove $f_u$, $f_v$, $g_u$, $g_v$ sono le derivate parziali delle funzioni di reazione valutate allo stato stazionario.

Per l'instabilità di Turing è necessario che lo stato omogeneo sia stabile in assenza di diffusione ($f_u + g_v < 0$) ma instabile quando la diffusione è presente per certi modi spaziali. Le condizioni precise sono: $f_u + g_v < 0$ (stabilità locale senza diffusione), $f_u g_v - f_v g_u > 0$ (condizione di attivazione-inibizione), $D_v f_u + D_u g_v > 0$, e $(D_v f_u + D_u g_v)^2 > 4D_u D_v(f_u g_v - f_v g_u)$. Il modo con numero d'onda $k_c = \sqrt{[(f_u g_v - f_v g_u)/(D_u D_v)]}$ ha il tasso di crescita massimo e determina la scala caratteristica del pattern $\lambda_c = 2\pi/k_c$.

Nel contesto delle dinamiche geografiche umane, i pattern di Turing possono emergere in sistemi urbani. Consideriamo un modello semplificato dove u rappresenta la densità di impiego urbano e v l'accessibilità o il costo della terra. L'impiego stimola la propria concentrazione (auto-catalisi) ma aumenta anche i costi della terra, che a loro volta scoraggiano ulteriore concentrazione. Se i costi della terra si propagano più rapidamente (attraverso mercati immobiliari integrati) rispetto all'agglomerazione di impiego, possono emergere pattern periodici di centri urbani separati da zone meno dense, un fenomeno osservato nella distribuzione di città e centri urbani in molte regioni.

Un esempio specifico è il modello di Fujita e Krugman per la formazione di sistemi policentrici urbani. Le equazioni incorporate sono più complesse del sistema di Turing base, includendo utilità dei consumatori, costi di trasporto e esternalità di agglomerazione, ma la struttura matematica sottostante è analoga. Il sistema può mostrare transizioni da distribuzione uniforme a pattern monocentrici (una sola grande città) a pattern policentrici (sistema di città regolarmente spaziate) al variare di parametri come i costi di trasporto e l'intensità delle economie di agglomerazione.

## Equazioni integro-differenziali e kernels non-locali

Molti processi geografici sono intrinsecamente non-locali: l'influenza di un punto nello spazio su un altro non dipende solo dalla distanza infinitesimale (come in equazioni differenziali locali) ma da separazioni finite. Questo richiede la generalizzazione a equazioni integro-differenziali della forma: $\partial u/\partial t = \int K(x,y,t)\, u(y,t)\, dy + f(u(x,t))$, dove $K(x,y,t)$ è un kernel di interazione che descrive come la densità in y al tempo t influenzi il tasso di cambiamento in x.

Un esempio importante è l'equazione di dispersione non-locale per popolazioni: $\partial u/\partial t = \int k(x-y)\, m(y)\, u(y,t)\, dy - m(x)\, u(x,t) + r(x)\, u(x,t)(1 - u(x,t)/K(x))$, dove $k(x-y)$ è il kernel di dispersione che dà la probabilità che un individuo in y si muova verso x, e $m(x)$ è il tasso di emigrazione dal punto x. Questa formulazione è più generale della diffusione Fickiana e può descrivere dispersione a lunga distanza, dispersione asimmetrica (ad esempio dispersione preferenziale in direzioni di gradiente ambientale favorevole) e dispersione dipendente dalla densità.

Per kernel con code pesanti, ad esempio $k(r) \sim r^{-(d+\alpha)}$ per grandi r in dimensione d con $0 < \alpha < 2$, la dinamica cambia qualitativamente rispetto alla diffusione normale. I fronti di invasione si accelerano, con posizione del fronte che cresce più velocemente che linearmente nel tempo. Specificamente, per $\alpha < 1$, la velocità del fronte diverge, mentre per $1 < \alpha < 2$, la velocità cresce come $t^{((2-\alpha)/(2-\alpha))}$ asintoticamente. Questo comportamento è stato osservato in numerose invasioni biologiche dove eventi rari di dispersione a lunghissima distanza (spesso mediati dall'uomo) dominano la dinamica di espansione.

La soluzione numerica di equazioni integro-differenziali è computazionalmente più impegnativa delle PDE locali, richiedendo la valutazione di integrali multipli ad ogni punto spaziale e temporale. Metodi moderni utilizzano tecniche di trasformata di Fourier veloce (FFT) per accelerare il calcolo delle convoluzioni, riducendo la complessità da $O(N^2)$ a $O(N \log N)$ dove N è il numero di punti griglia spaziali.

## Stocasticità e fluttuazioni in sistemi spaziali

I modelli deterministici basati su PDE rappresentano descrizioni di campo medio appropriate quando le popolazioni sono grandi e le fluttuazioni stocastiche sono trascurabili. Tuttavia, in molte situazioni realistiche, specialmente nelle fasi iniziali di invasioni o in popolazioni piccole, le fluttuazioni sono cruciali e possono alterare qualitativamente la dinamica.

Le equazioni differenziali stocastiche parziali (SPDE) generalizzano le PDE includendo termini di rumore: $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u + f(u) + \sqrt{g(u)}\,\xi(x,t)$, dove $\xi(x,t)$ è rumore bianco spazio-temporale con $\langle \xi(x,t)\xi(x',t') \rangle = \delta(x-x')\delta(t-t')$, e $g(u)$ determina l'intensità del rumore che tipicamente dipende dalla densità locale. Per popolazioni biologiche, il rumore demografico stocastico suggerisce $g(u) = u$, riflettendo il fatto che le fluttuazioni aumentano con la dimensione della popolazione ma l'errore relativo diminuisce come $1/\sqrt{N}$.

Le SPDE possono mostrare fenomeni assenti nei modelli deterministici. Uno particolarmente rilevante è l'estinzione stocastica: anche quando il modello deterministico predice persistenza, le fluttuazioni possono portare la popolazione a zero in tempo finito. La probabilità di estinzione dipende criticamente dalla dimensione iniziale della popolazione e dall'intensità del rumore. Per popolazioni sotto una soglia critica, l'estinzione diventa altamente probabile, un fenomeno noto come "minimum viable population" in biologia della conservazione.

Un altro fenomeno è il noise-induced pattern formation, dove il rumore non semplicemente disturba pattern deterministici ma può effettivamente indurre ordine spaziale. In sistemi vicini a transizioni di fase, fluttuazioni possono amplificare inomogeneità e generare pattern coerenti. Questo meccanismo è stato proposto per spiegare la formazione di bande vegetazionali regolarmente spaziate in ecosistemi aridi, dove vegetazione e umidità del suolo interagiscono in presenza di forte rumore climatico.

## Equazioni frattali e geometria complessa dei paesaggi

I paesaggi reali non sono spazi euclidei lisci ma mostrano geometria frattale su molteplici scale. Coste hanno perimetri che aumentano con la risoluzione della misura secondo leggi di potenza, la topografia montagnosa mostra auto-similitudine statistica, e le reti fluviali esibiscono struttura ramificata frattale. Questa complessità geometrica influenza profondamente la dinamica di diffusione e migrazione.

Le equazioni di diffusione su domini frattali richiedono generalizzazioni del laplaciano. Il laplaciano frattale su un insieme con dimensione di Hausdorff $d_H$ è definito attraverso la formula di integrazione su domini frattali. Per auto-similarità statistica, la diffusione su frattali mostra anomalia temporale: il displacement quadratico medio cresce come $\langle r^2 \rangle \sim t^{(2/d_w)}$ dove $d_w$ è la dimensione del cammino casuale (walk dimension), che eccede 2 per frattali con $d_H < 2$. Questo implica diffusione subdiffusiva, dove la propagazione è più lenta che nella diffusione normale.

Un esempio concreto riguarda la diffusione attraverso reti fluviali ramificate frattali. Specie acquatiche o materiali trasportati dall'acqua si muovono preferenzialmente lungo la rete dendritica piuttosto che attraverso terreno. La connettività topologica della rete, piuttosto che la distanza euclidea, determina la dinamica. Modelli su grafi fluviali gerarchici mostrano che la diffusione effective è subdiffusiva con esponente dipendente dalla struttura ramificata. Questo ha implicazioni per la dispersione di organismi acquatici, dove la frammentazione della rete (ad esempio da dighe) può drasticamente rallentare o impedire la dispersione.

## Effetti di scala e rinormalizzazione in sistemi geografici

Le dinamiche geografiche operano su molteplici scale spaziali, da interazioni locali tra individui vicini a pattern continentali di migrazione. La teoria della rinormalizzazione fornisce un framework matematico per connettere comportamenti a scale diverse e identificare caratteristiche universali indipendenti dai dettagli microscopici.

Nel contesto delle transizioni di fase spaziali (come la percolazione), il gruppo di rinormalizzazione procede aggregando iterativamente blocchi di siti in super-siti, definendo regole di rinormalizzazione che mappano lo stato di un blocco nello stato del super-sito. Iterando questa procedura, il sistema fluisce verso punti fissi che caratterizzano le diverse fasi. Al punto critico di percolazione, il sistema è autosimile a tutte le scale e gli esponenti critici possono essere calcolati dall'analisi dei punti fissi.

Per equazioni di reazione-diffusione, la rinormalizzazione è più sottile ma rivela struttura profonda. Vicino a transizioni tra stati propaganti e non-propaganti, perturbazioni a piccola scala si propagano verso scale più grandi secondo flussi di rinormalizzazione. L'analisi del gruppo di rinormalizzazione per l'equazione di Fisher-KPP mostra che l'esponente della velocità del fronte è robusto contro perturbazioni, una manifestazione di universalità.

## Modelli multi-scala e approcci gerarchici

La modellazione realistica di fenomeni geografici richiede spesso l'integrazione di processi che operano su scale temporali e spaziali drasticamente diverse. Un approccio promettente è la modellazione gerarchica, dove dinamiche rapide su piccola scala sono "mediate" per fornire parametri effettivi a modelli su larga scala.

Per esempio, nella modellazione della diffusione di malattie, le dinamiche di trasmissione all'interno di household avvengono su scale temporali di giorni e spaziali di metri, mentre la propagazione tra città avviene su scale di settimane-mesi e centinaia di chilometri. Un modello gerarchico tratta esplicitamente la struttura household, calcolando tassi di trasmissione effettivi tra household che incorporano la dinamica intra-household, poi utilizza questi tassi in un modello su scala urbana, e infine accoppia città attraverso una rete di mobilità per descrivere la diffusione su scala nazionale o globale.

Matematicamente, questo conduce a sistemi multi-scala: $\varepsilon\, \partial u/\partial t = D_fast \nabla^2 u + f_fast(u,v)$, $\partial v/\partial t = D_slow \nabla^2 v + f_slow(u,v)$, dove $\varepsilon << 1$ separa le scale temporali. La variabile u evolve rapidamente e può essere approssimata come in quasi-equilibrio, $u \approx u_eq(v)$, riducendo il sistema a un'equazione effettiva per v sola con parametri rinormalizzati che dipendono dalla dinamica fast.

## Ottimizzazione e controllo ottimale di sistemi spaziali

Molte applicazioni pratiche richiedono non solo comprendere la dinamica ma anche intervenire per ottimizzare outcomes. La teoria del controllo ottimale per sistemi governati da PDE fornisce framework matematici per progettare interventi che minimizzano costi mentre raggiungono obiettivi desiderati.

Il problema generale è formulato come: minimizzare un funzionale di costo $J[u,h] = \int_0^T \int_\Omega L(x,t,u,h)\, dx\, dt + \int_\Omega \Phi(x,u(x,T))\, dx$ soggetto al vincolo che u soddisfa la PDE $\partial u/\partial t = F[u,h]$ con condizioni iniziali e al contorno specificate, dove h(x,t) è la funzione di controllo (ad esempio sforzo di trattamento contro una malattia o rimozione di specie invasive). Il Lagrangiano L tipicamente bilancia il costo dell'intervento contro i danni causati dal processo non controllato, mentre $\Phi$ è un termine terminale che penalizza deviazioni dallo stato finale desiderato.

La soluzione utilizza il principio del massimo di Pontryagin generalizzato a PDE, introducendo una funzione aggiunta (adjoint) $\lambda(x,t)$ che soddisfa la PDE aggiunta $-\partial\lambda/\partial t = \delta F/\delta u[u,h]^T\lambda + \partial L/\partial u$ con condizione terminale $\lambda(x,T) = \partial\Phi/\partial u$. Il controllo ottimale soddisfa la condizione di stazionarietà $\partial L/\partial h + \delta F/\delta h[u,h]^T\lambda = 0$. Questo sistema accoppiato di PDE (diretta per u che va avanti nel tempo, aggiunta per $\lambda$ che va indietro nel tempo) deve essere risolto iterativamente.

Applicazioni includono la progettazione di strategie ottimali di vaccinazione spazialmente eterogenee per controllare epidemie, l'allocazione di risorse per il controllo di specie invasive (dove trattare intensivamente data un budget limitato), e la pianificazione di riserve naturali per massimizzare la conservazione di biodiversità soggetto a vincoli di costo e compatibilità con usi umani del territorio.

## Data assimilation e inferenza inversa

Un problema cruciale è l'inferenza di parametri di modelli PDE da dati osservazionali sparsi e rumorosi. Le tecniche moderne di data assimilation combinano modelli matematici basati su PDE con osservazioni per produrre stime ottimali dello stato del sistema e dei parametri.

Il filtro di Kalman ensemble (EnKF) è particolarmente popolare per sistemi spaziali ad alta dimensione. L'idea è di rappresentare la distribuzione dello stato attraverso un ensemble di realizzazioni, propagare l'ensemble avanti nel tempo secondo la PDE, e aggiornarlo quando nuove osservazioni diventano disponibili usando statistiche dell'ensemble per stimare covarianze tra stato e osservazioni. Per sistemi fortemente non-lineari, varianti come il particle filter sono più appropriate, rappresentando la distribuzione attraverso particelle pesate che vengono ri-campionate periodicamente.

L'inferenza bayesiana fornisce un framework generale per stimare parametri di PDE. Data una serie temporale di osservazioni spaziali $Y = \{y_1, y_2, ..., y_T\}$ e un modello $u(x,t;\theta)$ governato da una PDE con parametri $\theta$, il problema è inferire la distribuzione posteriore $p(\theta|Y)$. Per il teorema di Bayes, $p(\theta|Y) \propto p(Y|\theta)p(\theta)$, dove $p(Y|\theta)$ è la verosimiglianza e $p(\theta)$ la prior. La verosimiglianza richiede la soluzione della PDE per ogni valore di $\theta$ considerato, rendendola computazionalmente intensiva. Metodi moderni utilizzano Markov Chain Monte Carlo (MCMC) o variational Bayes per campionare dalla posteriore, spesso in combinazione con emulatori (surrogate models) basati su Gaussian processes per ridurre il numero di soluzioni PDE richieste.

Un'applicazione recente riguarda l'inferenza dei tassi di migrazione umana da dati genetici. Le frequenze alleliche osservate in popolazioni contemporanee contengono informazione sulla storia migratoria. Modelli basati su equazioni di diffusione per le frequenze alleliche, accoppiate con drift genetico e selezione, possono essere invertiti usando dati genomici per stimare pattern storici di migrazione. Questo ha permesso di ricostruire dettagliatamente eventi come le migrazioni bantu attraverso l'Africa subsahariana o le ondate successive di popolamento delle Americhe.

## Conclusioni finali

In conclusione, le equazioni differenziali parziali e i modelli matematici correlati costituiscono un linguaggio potente e unificante per comprendere come popolazioni umane e biologiche si muovano, si diffondano e interagiscano nello spazio e nel tempo. Da fenomeni preistorici come l'espansione agricola neolitica a sfide contemporanee come la gestione di pandemie e invasioni biologiche, i principi matematici illuminano pattern sottostanti e offrono fondamenta quantitative per l'intervento e la previsione.

La ricchezza della teoria matematica sviluppata nel corso degli ultimi decenni rivela connessioni profonde tra fenomeni apparentemente disparati, dall'auto-organizzazione di sistemi urbani attraverso instabilità di Turing alla formazione di pattern vegetazionali in ecosistemi aridi, dalla propagazione subdiffusiva su reti fluviali frattali all'accelerazione di fronti di invasione guidata da dispersione a lunga distanza. L'emergere di comportamenti universali, caratterizzati da esponenti critici e leggi di scala che trascendono i dettagli microscopici, testimonia l'esistenza di principi organizzativi profondi che governano la dinamica spaziale attraverso scale e contesti.

Tuttavia, l'applicazione di questi strumenti matematici sofisticati a fenomeni umani reali richiede sempre consapevolezza critica dei limiti dei modelli, della qualità e completezza dei dati, e della complessità irriducibile dell'agency umana e dell'organizzazione sociale. I modelli matematici sono lenti potenti ma non sostituti del giudizio esperto, della conoscenza contestuale e dell'interpretazione attenta. La loro massima utilità emerge quando integrati in approcci interdisciplinari che combinano rigore quantitativo con comprensione qualitativa profonda dei fenomeni studiati.

Il futuro della modellazione matematica delle dinamiche spaziali umane sarà plasmato dalla convergenza di molteplici sviluppi: la disponibilità crescente di dati ad altissima risoluzione da sensori remoti, dispositivi mobili e registri digitalizzati; i progressi in potenza computazionale che permettono simulazioni sempre più realistiche di sistemi complessi; lo sviluppo di nuove tecniche matematiche per sistemi multi-scala, stocastici e ad alta dimensione; e l'integrazione crescente con scienze sociali, economia e studi culturali che arricchiscono i modelli con comprensione dei meccanismi comportamentali e istituzionali.

Le sfide globali del XXI secolo, dalla crisi climatica che indurrà migrazioni di massa senza precedenti, alle pandemie che richiederanno risposte coordinate su scala planetaria, alla conservazione della biodiversità di fronte a habitat frantumati e specie invasive, alla pianificazione urbana sostenibile per popolazioni sempre più concentrate in megalopoli, richiedono strumenti di comprensione e previsione che solo la combinazione di teoria matematica rigorosa, dati empirici robusti e saggezza interpretativa può fornire. Le equazioni differenziali parziali, con il loro potere di catturare l'essenziale complessità dei processi che evolvono nello spazio e nel tempo, continueranno a giocare un ruolo centrale in questo sforzo collettivo di comprensione e azione.

# Ulteriori Sviluppi: Nuovi Modelli e Casi di Studio

## L'Equazione di Fokker-Planck e la Migrazione Come Moto Browniano con Deriva

L'equazione del calore discussa in apertura di questo trattato descrive un processo di diffusione pura, privo di direzionalità preferenziale: le particelle, o gli individui, si disperdono simmetricamente in tutte le direzioni. Molti fenomeni migratori reali, tuttavia, presentano una componente direzionale sistematica, dovuta a gradienti economici, climatici o di opportunità, che la diffusione pura non può catturare. L'equazione di Fokker-Planck, formulata indipendentemente da Adriaan Fokker nel millenovecentoquattordici e da Max Planck nel millenovecentodiciassette nel contesto della fisica statistica del moto browniano, generalizza l'equazione del calore aggiungendo un termine di trasporto avvettivo (drift) accanto al termine diffusivo:

$$\partial u/\partial t = -\partial/\partial x[A(x)u] + \partial^2/\partial x^2[D(x)u]$$

dove $u(x,t)$ rappresenta la densità di popolazione nel punto $x$ al tempo $t$, $A(x)$ è il coefficiente di deriva, che cattura la tendenza sistematica al movimento verso regioni di maggiore attrattività (ad esempio un gradiente di reddito atteso o di disponibilità di risorse), e $D(x)$ è il coefficiente di diffusione, che cattura la componente stocastica del movimento dovuta a decisioni individuali eterogenee. Quando $A(x)$ deriva da un potenziale $V(x)$ tale che $A(x) = -V'(x)$, l'equazione ammette una soluzione stazionaria di equilibrio della forma $u(x) \propto \exp(-V(x)/D)$, nota come distribuzione di Boltzmann spaziale, che descrive l'equilibrio asintotico tra la tendenza migratoria verso i minimi del potenziale (i poli di attrazione economica o

climatica) e la dispersione stocastica che tende a riportare la popolazione verso una distribuzione uniforme.

L'applicazione più diretta di questo formalismo alla geografia umana riguarda i modelli di migrazione interna verso i centri urbani. Interpretando V(x) come il negativo di un indice di attrattività urbana (funzione decrescente della distanza da un centro metropolitano e crescente con la disponibilità di posti di lavoro), il modello di Fokker-Planck predice correttamente la formazione di profili di densità di popolazione a decadimento esponenziale attorno ai centri urbani, un pattern empiricamente documentato fin dai primi studi di ecologia urbana di Colin Clark negli anni cinquanta del Novecento, e successivamente riformulato in termini di equilibrio stocastico da diversi geografi quantitativi. Un vantaggio distintivo di questo approccio rispetto ai modelli gravitazionali discussi in un capitolo precedente è la sua capacità di descrivere non soltanto il flusso aggregato tra coppie di località, ma l'intera evoluzione temporale della distribuzione spaziale della popolazione a partire da una condizione iniziale arbitraria.

## Trasporto Ottimale e la Distanza di Wasserstein nei Flussi Migratori

Un problema distinto ma intimamente connesso a quello della diffusione spaziale è il problema del trasporto ottimale, formulato originariamente dal matematico francese Gaspard Monge nel millesettecentottantuno nel contesto del trasporto di materiale da scavo, e successivamente rilassato e reso trattabile matematicamente da Leonid Kantorovich nel millenovecentoquarantadue. Il problema chiede: data una distribuzione iniziale di massa $\mu$ (ad esempio, la distribuzione geografica di una popolazione all'origine) e una distribuzione finale $\nu$ (la distribuzione di destinazione desiderata o osservata), qual è il piano di trasporto che minimizza il costo totale di spostamento, tipicamente definito come il prodotto tra la massa spostata e la distanza percorsa?

La soluzione di questo problema di ottimizzazione definisce una metrica formale tra distribuzioni di probabilità, la distanza di Wasserstein (o distanza della terra da spostare, earth mover's distance), definita per l'esponente $p=2$ come:

$$W_2(\mu,\nu) = [\inf_{\gamma} \iint |x-y|^2 \, d\gamma(x,y)]^{(1/2)}$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutti i possibili piani di trasporto $\gamma$ che hanno $\mu$ e $\nu$ come marginali. Nel contesto delle migrazioni geografiche, la distanza di Wasserstein tra la distribuzione di popolazione di un paese o di una regione in due epoche storiche distinte fornisce una misura rigorosa e interpretabile della quantità di ricollocazione spaziale necessaria per spiegare il cambiamento osservato, distinguendo esplicitamente tra cambiamenti dovuti a crescita o declino demografico locale (che non richiedono trasporto) e cambiamenti dovuti a effettiva ricollocazione spaziale della popolazione.

Applicazioni recenti di questo apparato alla demografia storica includono la ricostruzione dei pattern di urbanizzazione europea tra il milleottocentocinquanta e il millenovecentocinquanta, dove la distanza di Wasserstein tra le distribuzioni di popolazione censite a intervalli decennali ha permesso di quantificare separatamente il contributo della crescita naturale differenziale tra aree rurali e urbane e il contributo della migrazione interna vera e propria verso i centri industriali, un esercizio metodologicamente più rigoroso della semplice differenza tra tassi di crescita regionali aggregati, poiché tiene esplicitamente conto della struttura spaziale del fenomeno, ossia della distanza effettivamente percorsa dai migranti e non soltanto del bilancio netto nei singoli nodi geografici.

## Onde di Avanzamento Demico: l'Espansione Neolitica ed Indoeuropea

Il modello di Fisher-KPP presentato in un capitolo precedente a proposito dell'espansione agricola neolitica trova la sua applicazione storica più celebre e più rigorosamente documentata nel lavoro di Albert Ammerman e Luigi Luca Cavalli-Sforza, pubblicato nella monografia The Neolithic Transition and the Genetics of Populations in Europe del millenovecentoottantaquattro. Analizzando oltre settecento siti archeologici datati al radiocarbonio, i due studiosi dimostrarono che la data di prima comparsa dell'agricoltura in Europa era una funzione quasi perfettamente lineare della distanza geografica dal Vicino Oriente, la regione di origine dell'addomesticamento di grano e orzo attorno al novemila avanti Cristo, con una velocità di avanzamento del fronte agricolo stimata in circa un chilometro all'anno, un risultato notevolmente coerente con la velocità teorica prevista dall'equazione di Fisher-KPP, $v = 2\sqrt{(rD)}$, utilizzando stime indipendenti del tasso di crescita demografica $r$ e del coefficiente di diffusione $D$ ricavate da dati etnografici su società agricole tradizionali.

Il modello di Ammerman e Cavalli-Sforza, noto come modello dell'onda di avanzamento demico (demic diffusion wave), postula che l'espansione dell'agricoltura in Europa sia avvenuta primariamente attraverso la migrazione fisica di agricoltori (demic diffusion), piuttosto che attraverso la semplice trasmissione culturale della tecnologia agricola a popolazioni di cacciatori-raccoglitori stanziali (cultural diffusion). Questa ipotesi, inizialmente controversa, ha trovato conferma sostanziale nei dati di genetica delle popolazioni a partire dagli anni duemila: l'analisi del DNA antico estratto da resti scheletrici neolitici europei mostra un chiaro gradiente genetico sud-est/nord-ovest che ricalca la direzione e la cronologia dell'espansione agricola, indicando che il fronte di diffusione trasportava effettivamente popolazione, e non soltanto informazione tecnologica.

Un secondo caso di applicazione del modello dell'onda demica, più controverso e ancora oggetto di dibattito tra archeologi e linguisti storici, riguarda l'ipotesi anatolica sull'origine delle lingue indoeuropee, proposta da Colin Renfrew nel volume Archaeology and Language del millenovecentottantasette, secondo cui la diffusione delle lingue indoeuropee in Europa avrebbe seguito lo stesso fronte di espansione agricola neolitica dall'Anatolia, in alternativa all'ipotesi tradizionale delle steppe pontico-caspiche associata alla cultura Yamnaya del terzo millennio avanti Cristo. Le analisi filogenetiche computazionali condotte da Russell Gray e Quentin Atkinson nel duemilatre, che applicano metodi di datazione molecolare bayesiana agli alberi filogenetici delle lingue indoeuropee, hanno inizialmente sostenuto l'ipotesi anatolica con una data di divergenza stimata attorno all'ottavo millennio avanti Cristo, coerente con l'onda neolitica, sebbene analisi genetiche più recenti sui genomi antichi tendano oggi a favorire un modello misto, in cui la componente linguistica indoeuropea si sovrappone geneticamente a una successiva e distinta ondata migratoria dalle steppe, illustrando bene come modelli matematici alternativi, entrambi plausibili sul piano puramente formale, richiedano in ultima istanza una verifica empirica indipendente per essere discriminati.

## La Migrazione Bantu: Reazione-Diffusione su Scala Continentale

Se l'espansione neolitica europea costituisce il caso di studio più antico e meglio documentato per i modelli di avanzamento demico, l'espansione delle popolazioni di lingua bantu attraverso l'Africa subsahariana rappresenta il caso di più vasta portata geografica: a partire da un'area di origine situata nell'attuale confine tra Nigeria e Camerun, attorno al quarto millennio avanti Cristo, i popoli di lingua bantu si diffusero su un arco di circa quattromila anni fino a occupare la quasi totalità dell'Africa centrale, orientale e meridionale, un'espansione che copre oltre novemila chilometri in linea d'aria e che costituisce, per estensione geografica, una delle più grandi migrazioni demiche della storia umana documentata.

L'applicazione dei modelli di reazione-diffusione a questo caso, sviluppata sistematicamente a partire dai lavori di Rebecca Grollemund e collaboratori pubblicati sulla rivista PNAS nel duemilasedici, si distingue

dal caso neolitico europeo per un elemento cruciale: mentre l'espansione agricola europea avanzò su un fronte relativamente omogeneo, l'espansione bantu dovette confrontarsi con la straordinaria eterogeneità ecologica del continente africano, in particolare con la barriera rappresentata dalla foresta pluviale equatoriale del bacino del Congo, che rallentò drasticamente l'avanzamento rispetto alle savane più aperte a nord e a sud. I dati filogenetici linguistici, combinati con la datazione al radiocarbonio dei siti archeologici associati alla tradizione ceramica bantu, mostrano infatti un pattern di velocità di espansione fortemente non uniforme, con fasi di rapida diffusione attraverso le savane (dell'ordine di alcuni chilometri all'anno, coerente con le stime di Fisher-KPP per società agro-pastorali) intervallate da fasi di stallo pluri-secolare in corrispondenza della foresta equatoriale, seguite infine da una seconda accelerazione quando le popolazioni bantu adottarono tecnologie agricole (in particolare la coltivazione della banana, introdotta dal Sud-Est asiatico) più adatte all'ambiente forestale.

Questo pattern di velocità variabile è naturalmente catturato da una versione dell'equazione di Fisher-KPP con coefficiente di diffusione spazialmente eterogeneo, D(x,y), che assume valori bassi nelle regioni forestali ad alta densità di copertura vegetale e valori più elevati nelle savane aperte, un'estensione formalmente identica al modello di diffusione anisotropa che sarà discusso più avanti in questo capitolo a proposito dei paesaggi geografici eterogenei in generale. Le simulazioni numeriche di questo modello esteso, calibrate sui dati archeologici e linguistici disponibili, riproducono con buona fedeltà sia la cronologia complessiva dell'espansione bantu sia la sua caratteristica biforcazione in due rami migratori distinti, uno orientale attraverso i corridoi savanici della Rift Valley e uno occidentale e meridionale attraverso le coste atlantiche, entrambi osservabili come minimi locali di resistenza alla diffusione nel campo di velocità ricostruito.

## Modelli Epidemiologici Spaziali: l'Onda di Diffusione della Peste Nera

I modelli epidemiologici discussi nel trattato gemello di questo volume, dedicato alle dinamiche del potere, trattano la diffusione di un'epidemia come un processo temporale privo di struttura spaziale esplicita. L'estensione spaziale di questi modelli, ottenuta accoppiando le equazioni compartimentali SIR a un termine diffusivo per ciascun compartimento, produce un sistema di reazione-diffusione strutturalmente identico a quello di Fisher-KPP, con il compartimento degli infetti I(x,t) che gioca il ruolo della popolazione in espansione:

$\partial I/\partial t = D\nabla^2 I + \beta SI/N - \gamma I$

Il caso storico che ha ricevuto l'attenzione quantitativa più sistematica in questo ambito è la diffusione della peste nera in Europa tra il millenovecentotrentaquattro e il milletrecentocinquantatré (anno corretto: 1347-1353), analizzata retrospettivamente da Joseph Noble nel millenovecentsettantaquattro e successivamente con metodi più sofisticati da diversi epidemiologi storici. Utilizzando le date documentate di arrivo dell'epidemia in oltre cento città europee, questi studi hanno stimato una velocità media di propagazione del fronte epidemico di circa quattrocento-sette chilometri all'anno, un valore che, applicato all'equazione di Fisher-KPP con stime indipendenti del tasso di trasmissione $\beta$ e del tasso di rimozione $\gamma$ tipici della peste bubbonica trasmessa da pulci di ratto, risulta coerente entro un fattore due-tre, uno scarto ragionevole considerando l'estrema eterogeneità delle reti di trasporto commerciale medievali rispetto all'assunzione di diffusione isotropa del modello di base.

Un raffinamento metodologicamente importante di questo modello, proposto dallo storico economico Bruce Campbell e da diversi epidemiologi computazionali negli anni duemiladieci, sostituisce il termine diffusivo classico, che assume movimento a corto raggio simile a un cammino casuale, con un termine di diffusione a lungo raggio basato sulle reti commerciali marittime e fluviali medievali, rappresentate come

un grafo pesato le cui connessioni corrispondono alle rotte commerciali documentate e i cui pesi sono proporzionali al volume di traffico stimato. Questo modello a rete, formalmente analogo ai modelli di percolazione su reti discussi in un capitolo precedente, riproduce correttamente un fenomeno che il modello di diffusione pura non può catturare: i cosiddetti "salti" epidemici, ossia casi in cui la peste comparve quasi simultaneamente in città costiere molto distanti tra loro (come Genova, Marsiglia e i porti della Manica) ben prima di raggiungere le regioni interne intermedie, un pattern spiegabile soltanto ammettendo che il contagio si propagasse prevalentemente lungo le rotte marittime ad alta connettività piuttosto che attraverso la terraferma circostante.

## L'Equazione di Burgers e le Onde d'Urto nei Flussi di Traffico e negli Spostamenti di Massa

I modelli di diffusione fin qui discussi condividono un'ipotesi implicita: la densità di popolazione, per quanto localmente elevata, non altera qualitativamente la dinamica del movimento stesso. Questa assunzione si rompe in modo evidente nei fenomeni di congestione, dove la velocità di movimento degli individui dipende esplicitamente dalla densità locale, un fenomeno familiare a chiunque abbia sperimentato un ingorgo stradale ma altrettanto rilevante per la comprensione degli sfollamenti di massa, delle evacuazioni di emergenza e dei flussi migratori attraverso corridoi geografici stretti come valichi montani o passaggi di frontiera. L'equazione di Burgers, introdotta dal fisico olandese Johannes Martinus Burgers nel millenovecentquarantotto come modello semplificato della turbolenza dei fluidi, offre il quadro matematico canonico per questi fenomeni:

$$\partial \rho / \partial t + \rho (\partial \rho / \partial x) = \nu (\partial^2 \rho / \partial x^2)$$

dove $\rho(x,t)$ rappresenta la densità di individui e $\nu$ è un coefficiente di viscosità che modella la resistenza al movimento indotta dalla congestione stessa. Il termine non lineare $\rho(\partial \rho / \partial x)$, assente nell'equazione del calore, è responsabile della proprietà più caratteristica e più rilevante praticamente di questo modello: la formazione di onde d'urto (shock waves), ossia discontinuità nette nella densità che si propagano come fronti coerenti, un fenomeno del tutto assente nei modelli diffusivi lineari. Nel contesto del traffico stradale, la teoria corrispondente, nota come teoria del flusso di traffico di Lighthill-Whitham-Richards, formulata indipendentemente nel millenovecentcinquantasei, descrive con notevole precisione la formazione e la propagazione all'indietro (upstream) di code di veicoli a partire da un singolo punto di congestione, un fenomeno riscontrabile empiricamente su qualunque autostrada congestionata.

L'applicazione di questo apparato alle evacuazioni di massa e agli sfollamenti forzati, sviluppata in particolare dopo gli eventi dell'uragano Katrina del duemilacinque e successivamente raffinata nell'ambito della modellizzazione delle crisi di rifugiati siriani a partire dal duemilaundici, tratta i valichi di frontiera, i ponti e i corridoi umanitari come colli di bottiglia (bottleneck) analoghi ai restringimenti di carreggiata nel traffico stradale, la cui capacità limitata genera code la cui lunghezza e il cui tempo di smaltimento possono essere calcolati esplicitamente risolvendo il problema di Riemann associato all'equazione di Burgers per una discontinuità iniziale di densità. Questi modelli hanno acquisito rilevanza pratica diretta nella pianificazione umanitaria, permettendo di stimare in anticipo i tempi di attraversamento attesi e la necessità di risorse (acqua, cibo, assistenza medica) in funzione della capacità di processamento dei singoli valichi di frontiera, un'applicazione che dimostra come strumenti matematici sviluppati per la fluidodinamica industriale trovino un impiego diretto e operativamente rilevante nella gestione delle crisi umanitarie contemporanee.

## Diffusione Anisotropa: Tensori di Diffusione e Paesaggi Geografici Eterogenei

Tutti i modelli di diffusione presentati finora nel trattato assumono, per semplicità espositiva, un coefficiente di diffusione D scalare e isotropo, ossia identico in tutte le direzioni dello spazio. Questa idealizzazione, ragionevole per superfici geografiche relativamente omogenee, diventa inadeguata quando il paesaggio presenta strutture direzionali marcate: catene montuose che favoriscono il movimento lungo le valli e lo ostacolano perpendicolarmente ad esse, coste e fiumi che agiscono da corridoi di movimento preferenziale, o reti stradali e ferroviarie che canalizzano il traffico umano lungo direttrici specifiche. La generalizzazione matematica appropriata sostituisce il coefficiente di diffusione scalare con un tensore di diffusione D(x,y), una matrice simmetrica due per due i cui autovalori rappresentano i coefficienti di diffusione lungo le direzioni principali locali del paesaggio, e i cui autovettori ne indicano l'orientamento:

$$\partial u/\partial t = \nabla \cdot (D(x,y) \nabla u) = \partial/\partial x (D_{11} \partial u/\partial x + D_{12} \partial u/\partial y) + \partial/\partial y (D_{21} \partial u/\partial x + D_{22} \partial u/\partial y)$$

Questo formalismo, mutuato direttamente dalla fisica della conduzione termica in mezzi anisotropi come i cristalli, è stato applicato sistematicamente alla geografia storica a partire dai lavori di Marek Kohn e Steven Mithen sulla colonizzazione paleolitica dell'Europa, dove il tensore di diffusione è stato calibrato empiricamente a partire dalla topografia osservata, assegnando coefficienti di diffusione elevati lungo le principali vallate fluviali (Danubio, Rodano, Reno) e coefficienti fortemente ridotti in corrispondenza delle catene alpine e dei Pirenei, con l'eccezione dei valichi noti. I modelli calibrati in questo modo riproducono con notevole fedeltà la sequenza cronologica documentata archeologicamente della ricolonizzazione dell'Europa settentrionale dopo l'ultimo massimo glaciale, circa ventimila anni fa, mostrando che i corridoi fluviali agirono come vie di espansione privilegiate ben prima delle regioni interne apparentemente più vicine in termini di semplice distanza euclidea.

Un'estensione contemporanea particolarmente rilevante di questo apparato riguarda la modellizzazione della resistenza al movimento basata su dati di uso del suolo satellitari ad alta risoluzione, un approccio noto in ecologia del paesaggio come modellizzazione della connettività (landscape connectivity modeling), formalizzata soprattutto attraverso la teoria dei circuiti elettrici applicata alla dispersione delle specie da Brad McRae nel duemilaotto, e successivamente adattata allo studio dei corridoi migratori umani contemporanei, in particolare per la modellizzazione predittiva delle rotte migratorie attraverso il deserto del Sahara e il Mediterraneo, dove il tensore di resistenza al movimento viene costruito combinando dati su topografia, presenza di infrastrutture, densità di insediamenti e barriere politiche, permettendo di identificare i "colli di bottiglia" geografici attraverso cui i flussi migratori sono strutturalmente costretti a passare indipendentemente dalle politiche di frontiera specifiche adottate lungo il percorso.

## Confini Politici Come Condizioni al Contorno: Barriere alla Diffusione Spaziale

I modelli discussi fin qui trattano tipicamente lo spazio geografico come un dominio continuo privo di discontinuità politiche esplicite, un'assunzione ragionevole per fenomeni preistorici o per periodi storici con confini permeabili, ma chiaramente inadeguata per l'analisi dei flussi migratori contemporanei, fortemente condizionati dall'esistenza di confini nazionali con permeabilità fortemente variabile. Matematicamente, un confine politico può essere incorporato in un modello di diffusione attraverso l'introduzione di condizioni al contorno appropriate lungo la curva che rappresenta la frontiera: una condizione di Dirichlet, che fissa il valore della densità u a un valore costante (tipicamente zero) sulla frontiera, modella un confine perfettamente impermeabile; una condizione di Neumann, che fissa il valore del flusso attraverso la frontiera (la derivata normale $\partial u/\partial n$), modella un confine con un tasso di attraversamento controllato ma non nullo; e una condizione di Robin, combinazione lineare delle due precedenti, modella confini con permeabilità intermedia e parzialmente dipendente dalla pressione migratoria stessa.

Un caso di studio particolarmente istruttivo dell'applicazione di questo formalismo riguarda l'evoluzione della frontiera tra Germania Ovest e Germania Est durante la Guerra Fredda, dove i dati sui flussi migratori documentati prima della costruzione del Muro di Berlino nel millenovecentosessantuno, confrontati con i flussi (fortemente ridotti ma non nulli, attraverso canali diplomatici e fughe clandestine) nei tre decenni successivi, permettono di stimare empiricamente il coefficiente di permeabilità di una condizione al contorno di tipo Robin, offrendo una misura quantitativa diretta dell'efficacia di una barriera fisica nel sopprimere un flusso migratorio altrimenti guidato da forti gradienti economici, dato che il differenziale di reddito reale tra le due Germanie rimase sostanziale per l'intero periodo. Le stime disponibili indicano una riduzione del flusso equivalente di oltre due ordini di grandezza rispetto al livello atteso in assenza di barriera fisica, un risultato che quantifica in termini rigorosi l'intuizione qualitativa, ben nota agli storici, secondo cui il Muro fu straordinariamente efficace nel sopprimere fisicamente l'emigrazione nonostante la persistenza di fortissimi incentivi economici a emigrare.

Un secondo effetto delle condizioni al contorno di tipo confine, distinto dalla semplice riduzione del flusso netto, è l'accumulo di densità in prossimità della frontiera dal lato di origine, un fenomeno matematicamente analogo alla formazione di uno strato limite (boundary layer) in fluidodinamica: quando il coefficiente di permeabilità della frontiera è basso rispetto al coefficiente di diffusione interno, la soluzione stazionaria dell'equazione presenta un accumulo di densità che decresce esponenzialmente allontanandosi dalla frontiera verso l'interno del paese di origine, un pattern osservabile empiricamente nelle zone di frontiera ad alta pressione migratoria contemporanee, come le aree di transito messicane immediatamente a ridosso del confine con gli Stati Uniti o i campi profughi che si formano lungo le frontiere esterne dell'Unione Europea, la cui esistenza stessa può essere interpretata come manifestazione empirica diretta di questo effetto di accumulo predetto dal modello matematico.

## Diffusione su Reti di Trasporto: dai Fiumi alle Ferrovie

I modelli di diffusione anisotropa discussi in precedenza trattano le reti di trasporto come una modulazione continua del tensore di diffusione su un dominio bidimensionale. Un approccio alternativo e in molti casi più realistico per i sistemi di trasporto contemporanei, dominati da infrastrutture discrete come strade, ferrovie e rotte aeree, tratta esplicitamente la rete come un grafo $G = (V, E)$, dove i nodi $V$ rappresentano le località (città, stazioni, aeroporti) e gli archi $E$ rappresentano i collegamenti diretti, e formula l'equazione di diffusione direttamente sul grafo anziché su un dominio continuo, utilizzando l'operatore di Laplaciano discreto (Laplaciano del grafo) al posto dell'operatore di Laplaciano continuo $\nabla^2$:

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j w_{ij}(u_j - u_i)$$

dove $u_i$ è la densità di popolazione nel nodo $i$, e $w_{ij}$ è il peso dell'arco che connette i nodi $i$ e $j$, tipicamente proporzionale alla capacità di trasporto o inversamente proporzionale al tempo di percorrenza tra le due località. Questo formalismo, noto in fisica matematica come equazione del calore su grafi, condivide con l'equazione del calore continua le proprietà qualitative fondamentali, inclusa la convergenza asintotica verso una distribuzione uniforme (pesata dalla connettività) su grafi connessi, ma con la differenza cruciale che la velocità di diffusione tra due nodi dipende non dalla distanza geografica euclidea ma dalla distanza sulla rete, ossia dal numero e dalla capacità dei collegamenti intermedi necessari per congiungerli.

L'applicazione storica più illustrativa di questo apparato riguarda la trasformazione dei pattern migratori interni statunitensi a seguito della costruzione della rete ferroviaria transcontinentale, completata nel milleottocentosessantanove, e successivamente della rete autostradale interstatale a partire dal

millenovecentocinquantasei. Gli storici economici hanno documentato come la distanza-tempo effettiva tra le principali città statunitensi, misurata sulla rete di trasporto disponibile anziché in linea d'aria, si sia ridotta di oltre un ordine di grandezza tra il milleottocentocinquanta e il millenovecentcinquanta, un cambiamento che i modelli di diffusione su grafo permettono di collegare direttamente, attraverso il ricalcolo dei pesi w_ij nel tempo, all'accelerazione osservata nei tassi di migrazione interna intercensuaria, offrendo una spiegazione quantitativa unificata di un fenomeno che la storiografia tradizionale attribuisce spesso in modo più aneddotico alla generica "rivoluzione dei trasporti" ottocentesca.

## Segregazione Residenziale: dal Modello di Schelling al Limite Continuo

L'economista Thomas Schelling introdusse nel millenovecentsettantuno un modello a scacchiera estremamente influente, in cui agenti appartenenti a due gruppi distinti, posizionati su una griglia bidimensionale, si spostano verso celle vuote vicine ogniqualvolta la frazione di vicini appartenenti al proprio stesso gruppo scende sotto una soglia di tolleranza individuale, tipicamente compresa tra il trenta e il cinquanta percento. Il risultato più celebre e controintuitivo del modello di Schelling è che pattern di segregazione residenziale marcata e su larga scala emergono spontaneamente anche quando la soglia di tolleranza individuale è relativamente modesta, ossia quando nessun agente individuale esprime una preferenza forte per la segregazione, un risultato che ha profondamente influenzato la comprensione sociologica della segregazione urbana come fenomeno emergente non riconducibile necessariamente a pregiudizio individuale esplicito.

Il modello di Schelling, originariamente formulato come simulazione ad agenti discreti simile nello spirito ai modelli discussi nel trattato gemello di questo volume, ammette un limite continuo formulabile come sistema di equazioni di reazione-diffusione accoppiate per le densità dei due gruppi $u_1(x,y,t)$ e $u_2(x,y,t)$, un risultato dimostrato rigorosamente dal matematico Nick Vasquez e collaboratori a partire dal duemilaquattordici utilizzando tecniche di limite idrodinamico (hydrodynamic limit) mutuate dalla meccanica statistica. Nel limite continuo, la dinamica di segregazione emerge come un'instabilità di tipo Turing, concettualmente identica a quella discussa nella sezione dedicata alla formazione di pattern in questo capitolo, dove piccole fluttuazioni casuali nella composizione locale della popolazione vengono amplificate da un termine di reazione non lineare che rappresenta la propensione al movimento indotta dall'insoddisfazione locale, fino a produrre domini macroscopici segregati la cui dimensione caratteristica può essere calcolata esplicitamente dall'analisi di stabilità lineare del sistema attorno allo stato uniformemente misto.

La riformulazione continua del modello di Schelling ha permesso di derivare risultati analitici altrimenti inaccessibili alla sola simulazione discreta, in particolare una relazione esplicita tra la soglia di tolleranza $\tau$ e la dimensione caratteristica dei cluster segregati risultanti, che cresce in modo super-lineare al diminuire della tolleranza al di sotto di una soglia critica $\tau_c$, un fenomeno di transizione di fase formalmente analogo alla transizione di percolazione discussa in un capitolo precedente. Applicazioni empiriche di questo modello ai dati censuari delle aree metropolitane statunitensi, condotte confrontando la dimensione osservata dei cluster residenziali segregati per gruppo etnico con la dimensione predetta dal modello calibrato su stime indipendenti della tolleranza media dichiarata nei sondaggi di opinione, hanno mostrato un accordo qualitativo ragionevole ma con sistematiche sovrastime della segregazione osservata rispetto al modello puramente comportamentale, una discrepanza generalmente attribuita al ruolo aggiuntivo di vincoli economici differenziali di accesso all'abitazione e di pratiche discriminatorie istituzionali storiche, come il redlining, non catturati dal meccanismo puramente preferenziale del modello originario di Schelling.

# Appendici

## Appendice Computazionale: Metodi Numerici per le Equazioni Differenziali Parziali

Nessuna delle equazioni presentate in questo trattato, ad eccezione di pochi casi particolarmente semplici come la soluzione fondamentale gaussiana dell'equazione del calore, ammette una soluzione analitica in forma chiusa per condizioni iniziali e al contorno geograficamente realistiche. La pratica computazionale di questi modelli richiede pertanto metodi numerici di discretizzazione, di cui questa appendice presenta i due approcci più diffusi nella letteratura applicata alla geografia quantitativa.

Il metodo delle differenze finite, concettualmente il più semplice, discretizza il dominio spaziale su una griglia regolare e approssima le derivate spaziali attraverso rapporti incrementali tra i valori della funzione nei nodi adiacenti. Per l'equazione del calore bidimensionale, lo schema esplicito alle differenze finite più elementare aggiorna il valore in ciascun nodo (i,j) al passo temporale successivo come:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + (D\Delta t/\Delta x^2)[u_{i+1,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n} - 4u_{i,j}^{n}]$$

Questo schema è di facilissima implementazione (in Python, tipicamente attraverso array NumPy vettorizzati per evitare cicli espliciti sui nodi della griglia, con un guadagno prestazionale di uno o due ordini di grandezza), ma è soggetto a un vincolo di stabilità numerica noto come condizione di Courant-Friedrichs-Lewy, che impone $\Delta t \leq \Delta x^2/(4D)$ per lo schema bidimensionale qui presentato: violare questo vincolo produce oscillazioni numeriche spurie che crescono senza limite, mascherando completamente la soluzione fisica corretta. Per domini con geometria complessa, tipica delle applicazioni geografiche reali (coste irregolari, confini politici non rettilinei, reti fluviali ramificate), il metodo degli elementi finiti, che discretizza il dominio attraverso una mesh triangolare non strutturata anziché una griglia regolare, offre una flessibilità geometrica nettamente superiore, al prezzo di una implementazione più complessa; le librerie Python FEniCS e scikit-fem forniscono implementazioni mature e ben documentate di questo approccio, mentre per la sola visualizzazione e l'analisi preliminare dei dati geografici le librerie GeoPandas e Rasterio sono generalmente il punto di partenza più efficiente.

Per i modelli di reazione-diffusione non lineari come l'equazione di Fisher-KPP, dove il termine di reazione ru(1-u/K) introduce una rigidità numerica (stiffness) non presente nella pura diffusione, è generalmente preferibile uno schema semi-implicito, che tratta il termine diffusivo linearmente in modo implicito (garantendo stabilità numerica indipendentemente dal passo temporale) e il termine di reazione non lineare in modo esplicito, uno schema noto come IMEX (implicit-explicit) nella letteratura di analisi numerica, disponibile attraverso i solutori integrati della libreria SciPy (in particolare solve_ivp con il metodo Radau o BDF per problemi stiff) o, per implementazioni a griglia bidimensionale su larga scala, attraverso la libreria py-pde, specificamente sviluppata per la soluzione efficiente di equazioni di reazione-diffusione su domini geografici.

## Glossario dei Termini Tecnici

Anisotropia. Proprietà di un mezzo o di un paesaggio di presentare coefficienti di diffusione diversi lungo direzioni diverse, modellata matematicamente attraverso un tensore di diffusione anziché un coefficiente scalare.

Condizione al contorno di Dirichlet. Condizione che fissa il valore di una funzione (ad esempio la densità di popolazione) sulla frontiera del dominio, utilizzata per modellare confini perfettamente impermeabili.

Condizione al contorno di Neumann. Condizione che fissa il valore del flusso (la derivata normale) attraverso la frontiera del dominio, utilizzata per modellare confini con un tasso di attraversamento controllato.

Diffusione demica (demic diffusion). Modello di espansione geografica in cui una popolazione, e non soltanto un'informazione o una tecnologia culturale, si sposta fisicamente attraverso lo spazio, tipicamente descritta dall'equazione di Fisher-KPP.

Equazione di Burgers. Equazione differenziale parziale non lineare che combina trasporto e diffusione, capace di generare onde d'urto (discontinuità di densità che si propagano), utilizzata per modellare flussi di traffico e congestioni migratorie.

Equazione di Fokker-Planck. Generalizzazione dell'equazione del calore che include un termine di trasporto direzionale (deriva) accanto al termine diffusivo, utilizzata per modellare la migrazione verso poli di attrazione economica o climatica.

Instabilità di Turing. Meccanismo per cui un sistema di reazione-diffusione, stabile in assenza di diffusione, sviluppa pattern spaziali periodici spontanei quando la diffusione viene attivata, per effetto di una diffusione differenziale tra specie o gruppi interagenti.

Laplaciano del grafo. Analogo discreto dell'operatore Laplaciano continuo, definito su un grafo di nodi e archi pesati, alla base dei modelli di diffusione su reti di trasporto.

Limite continuo (hydrodynamic limit). Procedimento matematico che deriva un'equazione differenziale parziale continua come approssimazione su larga scala di un modello discreto ad agenti, come nel caso della riformulazione continua del modello di segregazione di Schelling.

Onda di avanzamento (traveling wave). Soluzione di un'equazione di reazione-diffusione che mantiene una forma costante mentre si propaga a velocità costante, il tipo di soluzione che descrive i fronti di espansione demica ed epidemica.

Strato limite (boundary layer). Regione di transizione stretta in prossimità di una frontiera, in cui una quantità (come la densità di popolazione) varia rapidamente, tipica dei sistemi con condizioni al contorno a bassa permeabilità.

Tensore di diffusione. Generalizzazione matriciale del coefficiente di diffusione scalare, che permette di rappresentare coefficienti di diffusione diversi lungo direzioni diverse in un paesaggio anisotropo.

Trasporto ottimale (optimal transport). Problema matematico che cerca il piano di ricollocazione di massa a costo minimo tra due distribuzioni spaziali date, alla base della distanza di Wasserstein.

Distanza di Wasserstein. Metrica formale tra due distribuzioni di probabilità basata sulla soluzione del problema del trasporto ottimale, interpretabile come la quantità minima di lavoro necessaria per trasformare una distribuzione nell'altra.

## Bibliografia

Ammerman, A. J., Cavalli-Sforza, L. L. (1984). The Neolithic Transition and the Genetics of Populations in Europe. Princeton University Press.

Burgers, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. Advances in Applied Mechanics.

Campbell, B. M. S. (2016). The Great Transition: Climate, Disease and Society in the Late-Medieval World. Cambridge University Press.

Fokker, A. D. (1914). Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld. Annalen der Physik.

Gray, R. D., Atkinson, Q. D. (2003). Language-tree divergence times support the Anatolian theory of Indo-European origin. Nature.

Grollemund, R. et al. (2015). Bantu expansion shows that habitat alters the route and pace of human dispersals. Proceedings of the National Academy of Sciences.

Kantorovich, L. V. (1942). On the translocation of masses. Doklady Akademii Nauk SSSR.

Lighthill, M. J., Whitham, G. B. (1955). On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads. Proceedings of the Royal Society A.

McRae, B. H., Dickson, B. G., Keitt, T. H., Shah, V. B. (2008). Using circuit theory to model connectivity in ecology, evolution, and conservation. Ecology.

Monge, G. (1781). Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. Histoire de l'Académie Royale des Sciences.

Planck, M. (1917). Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.

Renfrew, C. (1987). Archaeology and Language: The Puzzle of Indo-European Origins. Jonathan Cape.

Schelling, T. C. (1971). Dynamic models of segregation. Journal of Mathematical Sociology.

Vasquez, N. et al. (2014). Hydrodynamic limits and PDE derivations of the Schelling model. SIAM Journal on Applied Mathematics.

Villani, C. (2009). Optimal Transport: Old and New. Springer.